УДК 517.53+512.54+477.85[378.016:51]''194/199
№ держреєстрації 0116U001673
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
ЧНУ імені Юрія Федьковича
58002, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 5; тел. (0372) 52-61-42
факс (0372) 55-29-44; nd-office@chnu.edu.ua

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
Чернівецького
національного університету
імені Юрія Федьковича
д.т.н., доцент
_____________ А. П. Саміла
30 жовтня 2020 р.

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ. ГРУПИ, КІЛЬЦЯ – ДОСЛІДЖЕННЯ, БУДОВА. МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА НА БУКОВИНІ 1940-1990 РОКИ.

(остаточний)

Деканка факультету
математики та інформатики,
докторка фіз.-мат. наук, професорка — Ольга МАРТИНЮК

Керівник НДР
доктор фіз.-мат. наук, професор — Василь ГОРОДЕЦЬКИЙ

2020

СПИСОК АВТОРІВ

1. Доктор фіз.-мат. наук, професор		В.Городецький (вступ, розділ I, п.п. 1.1-1.4, висновки)
2. Доктор історичних наук, професор		І. Житарюк (вступ, розділ III, п.п. 3.1-3.3 висновки)
3. Докторка фіз.-мат. наук, професорка		О. Мартинюк (вступ, розділ I, п.п. 1.1-1.3 висновки)
4. Кандидатка фіз.-мат. наук, доцентка		В. Сікора (вступ, розділ II, п. 2.1, висновки)
5. Кандидатка фіз.-мат. наук, доцентка		Р. Колісник (вступ, розділ I, п. 1.2-1.3, висновки)
6. Кандидатка фіз.-мат. наук, доцентка		С. Боднарук (розділ I, п. 1.4)
7. Кандидат фіз.-мат. наук, доцент		В. Мироник (розділ I, п. 1.3)
8. Кандидатка фіз.-мат. наук, асистентка		Н. Шевчук (розділ I, п. 1.2)
9. Кандидатка фіз.-мат. наук, асистентка		В. Лучко (розділ II, п. 2.2)
10. Кандидатка фіз.-мат. наук, асистентка		Ж. Довгей (розділ II, п. 2.3)

Нормоконтроль Холодницька Л.М.

\

РЕФЕРАТ

Звіт по НДР: 106с., 5 табл., 4 рис., 143 джерела (49 власних за 5 років).

АСОЦІАТИВНА АЛГЕБРА, ВІНЦЕВИЙ ДОБУТОК, ГІПЕРОКТАЕДРАЛЬНА ГРУПА, ЕВОЛЮЦІЙНЕ РІВНЯННЯ, КОРОЗМІРНІСТЬ, МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА І НАУКА, НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА, ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР, УЗАГАЛЬНЕНА ФУНКЦІЯ, УНІТРИКУТНИЙ АВТОМОРФІЗМ.

Об'єкт дослідження – нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь, алгебраїчні структури (вінцеві добутки деяких груп, асоціативні алгебри, групи трикутних та унітрикутних автоморфізмів кілець многочленів від двох змінних над деякими полями), математична освіта і наука на Буковині за радянської доби (1940 – 1990 рр.).

Мета роботи – розвиток теорії нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь; побудова та дослідження властивостей деяких алгебраїчних конструкцій (вінцевих добутків груп, асоціативних алгебр, груп трикутних та унітрикутних автоморфізмів кілець многочленів від двох змінних над деякими полями); дослідження розвитку математичної освіти і науки на Буковині (1940–1990 рр.).

Основні результати:

- Розвинено теорію нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з аналітичними символами, еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором, еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами та еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій.
- Описано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи. Наведено алгоритм побудови систем твірних вінцевого добутку $A_n \wr A_m$ двох знакозмінних груп та вказано конкретні системи твірних, які складаються лише з двох елементів.
- Досліджено властивості асоціативних алгебр R, які близькі до сум своїх нільпотентних підалгебр, зокрема тих, що містять дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що їх сума $A + B$ (як векторних підпросторів) має скінченну корозмірность в алгебрі R.
- Наведено результати щодо групових властивостей та теоретико-групової будови груп трикутних та унітрикутних автоморфізмів кілець многочленів від двох змінних над полями. Групи трикутних автоморфізмів досліджено для полів нульової характеристики, а групи унітрикутних автоморфізмів – для полів як нульової характеристики, так і характеристики $p > 0$, зокрема, скінченних полів.
- Розкрито особливості розвитку загальноосвітньої математичної підготовки у навчальних закладах Чернівецької області та математичної

освіти і науки в Чернівецькому університеті за часів перебування краю у складі УРСР (1940–1941, 1944-1991 рр.).

ЗМІСТ

ВСТУП

I. При математичному моделюванні різних складних явищ у сучасному природознавстві, економіці, техніці, при вивченні багатьох процесів у хімічній та біологічній кінетиці, при розв'язуванні задач теорії теплопровідності, дифузії та тепломасопереносу, кристалографії, у сучасній теорії сигналів, гідродинаміці, при вивченні задач про взаємодію тіл, тощо, використовуються рівняння з частинними похідними як скінченного, так і нескінченного порядків, рівняння із зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами, еволюційні рівняння з псевдодиференціальними операторами або функціями від таких операторів. Задача Коші для таких рівнянь часто ставиться у випадку, коли початкові функції мають особливості в одній або декількох точках. Якщо ці особливості мають степеневий порядок, то такі функції допускають регуляризацію у просторах узагальнених функцій скінченного порядку типу розподілів Соболєва-Шварца. Якщо ж порядок особливостей вищий за степеневий, то ці функції є узагальненими функціями нескінченного порядку (наприклад, ультрарозподілами, гіперфункціями). Отже, задача Коші для таких рівнянь має природну постановку і в класах початкових умов, які є узагальненими функціями скінченного або нескінченного порядку.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)|_{t=0} = f$ замінюється умовою $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$, де $t_0 = 0, \{t_1, \dots, t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$, – фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші), при цьому умова $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k\, u(t,\cdot)|_{t=t_k} = f$ трактується в класичному розумінні або в слабкому сенсі, якщо f – узагальнена функція.

Нелокальна багатоточкова за часом задача відноситься до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними, теорія яких інтенсивно розвивається з сімдесятих років минулого століття. Дослідження таких задач зумовлене багатьма застосуваннями в механіці, фізиці, хімії, біології, екології та інших природничо-наукових дисциплінах, які виникають при математичному моделюванні тих чи інших процесів. На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вперше вказав О.О. Дезін, який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поруч з локальними і нелокальні умови. А.Х. Мамян встановив, що існують рівняння з частинними похідними в шарі, для ких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

Дослідженням нелокальних крайових задач у різних аспектах займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, О.А. Самарський, Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, М.І. Матійчук, В.І. Чесалін, А.Н. Нахушев та ін.). Одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджені питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовані умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У першому розділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами або функціями від таких операторів, що діють в локально опуклих топологічних просторах, які є індуктивними або проективними границями зліченно нормованих просторів нескінченно диференційовних функцій. Якщо символами псевдодиференціальних операторів є аналітичні функції, то такі оператори слід трактувати як оператори диференціювання нескінченного порядку, які діють у відповідних топологічних просторах. Розвивається теорія нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначених еволюційних рівнянь у випадку, коли функція, за допомогою якої задається відповідна умова, є узагальненою функцією типу розподілів або ультрарозподілів.

II. Одним із фундаментальних класичних понять в алгебрі є поняття групи, важливість якої для математики в цілому зіставляється з такими поняттями як категорія, множина, відображення, кільце, модуль, топологічний простір, многовид, міра тощо. При цьому основним об'єктом всієї математики останнього століття є поняття групи, у котрій визначено деяку доповняльну структуру — наприклад, топологічні групи, дійсні та комплексні групи Лі, алгебраїчні групи, p-адичні аналітичні групи, проскінченні групи, адельні групи тощо. Ці поняття лежать в основі не лише алгебри та топології, але й Ріманової геометрії, алгебричної геометрії, теорії комплексних аналітичних просторів, теорії чисел, теорії автоморфних функцій, функціонального та гармонійного аналізу, теорії спеціальних функцій та ергодичної теорії. Вони знайшли свої різноманітні застосування у фізиці та квантовій механіці.

Найбільш цікавим прикладом є конкретні групи — наприклад, групи симетрій геометричних конфігурацій, прості скінченні групи, прості алгебраїчні групи, класичні групи, групи рухів, групи типу Лі, групи Шевальє, групи Стейнберга, групи Кокстера, групи Вейля, групи, породжені спеціальними елементами (наприклад, відображеннями, псевдовідображеннями, кореневими елементами, квадратичними елементами тощо), кристалографічні групи, спорадичні групи, групи скінченно автоматних перетворень Мілі тощо. Саме вивченню цих груп присвячена переважна більшість глибоких та важливих результатів.

Що стосується дослідження абстрактних нескінченних груп, то здебільшого тільки їх геометрична реалізація може дати плідні результати. Ці дослідження стосуються, наприклад, вільних груп, вільних добутків, амальгам, груп Бернсайда тощо. Як правило, з такими групами пов'язуються групи графів та всі результати отримуються саме за допомогою мови теорії графів.

У зв'язку з численними застосуваннями у алгебраїчній теорії чисел, комбінаториці, теорії кодування, теорії граток, класифікації многовидів тощо проводяться інтенсивні дослідження скінченних груп. Ці групи влаштовані більш складно, ніж алгебраїчні групи над алгебраїчно замкненим полем і значно простіше, ніж алгебраїчні групи над довільним полем. Тому всі дослідження, що стосуються скінченних груп, часто приводять до алгебраїчних груп над алгебраїчно замкненим полем. Хоча у цьому випадку можна також користуватися геометричними реалізаціями, будуючи комбінаторну геометрію, виходячи із самої групи (білдінги, діаграмні геометрії).

Одним із найстаріших розділів теорії груп є теорія зображень груп, котра існує як самостійний розділ математики вже близько 120 років. Перший період її розвитку пов'язаний з іменами Фробеніуса Г., Шура І., Бернсайда В. та Моліна Ф.Е. Більш пізній, другий період розвитку цієї теорії, — створення теорії зображень компактних топологічних груп — представлений роботами Х. Неймана, Ф. Петера, Г. Вейля, Е. Картана, І.М. Гельфанда, М.А. Наймарка та їх учнів.

Метасиметричні групи, тобто ітеровані вінцеві добутки симетричних груп скінченного степеня, було введено до розгляду в роботі Л.А. Калужніна[1] у зв'язку з дослідженням груп ізометрій так званих метричних просторів Кантора. Пізніше з'ясувалося, що ці групи природним чином виникають в теорії графів, теорії автоматних груп, фрактальній геометрії тощо. У зв'язку з цим, цілий ряд робіт різних авторів було присвячено дослідженню будови різних типів метасиметричних груп (див., наприклад, [[2], [3], [4], [5], [6]]).

Зокрема, в роботах [[3], [5], [6]] досліджувалися системи твірних метасиметричних груп. Кожна метасиметрична група містить природну підгрупу — вінцевий добуток відповідних знакозмінних груп. Такі вінцеві добутки називають метазнакозмінними групами. У порівнянні з метасиметричними групами, будова метазнакозмінних груп досліджена поки що мало. Найвідомішим результатом тут

---

[1] Калужнин Л.А. Об одном обобщении силовских -подгрупп симметрических групп // Acta math. Hung.— 1951.— V.2, N3-4.— P.197-221.

[2] Заровный В.П. Автоматные подстановки и сплетения групп // Доклады АН СССР.— 1965.— Т.160, N3.— С.562-565.

[3] Иванюта И.Д. Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы // Укр. мат. журнал.— 1963.— N15.— С.240-249.

[4] Чакань Б., Гечег Ф. О группе автоматных подстановок // Кибернетика.— 1965.— N5.— С.14-17.

[5] Сикора В.С., Сущанский В.И. Системы порождающих групп автоматных подстановок // Кибернетика и системный анализ.— 2000.— N3.— С.121-133.

[6] Олійник Б.В., Сущанський В.І., Сікора В.С. Метасиметричні та метазнакозмінні групи нескінченного рангу // Математичні студії, 2008.— Т. 29, N 2.— С.139–150.

є теорема М. Бхаттачар'ї[7] про те, що вінцевий добуток за нескінченними послідовностями знакозмінних груп степеня не вище 5 є 2-породженим як проскінченна група. Проте доведення цього факту неконструктивне. Воно істотно опирається на класифікацію скінченних простих груп. А тому, природною задачею є питання конструктивної побудови і характеризації скінченних незвідних систем твірних (в топологічному сенсі) в різних метазнакозмінних групах.

Саме вивченню цих питань присвячено підрозділі 2.1, у якому описано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи та алгоритм побудови двохелементних систем твірних вінцевого добутку $A_n \wr A_m$ двох знакозмінних груп та вказано конкретні системи твірних, які складаються лише з двох елементів.

Вивченню асоціативних кілець R, які є сумою $R = A + B$ двох своїх підкілець A і B з певними властивостями присвячено багато робіт різних авторів. Велика кількість результатів в цій області пов'язані з відомою теоремою О. Кегеля[8] про нільпотентність асоціативного (не обов'язково комутативного) кільця, яке є сумою двох своїх нільпотентних підкілець. Відзначимо також результати К. Бейдара та А. Міхалєва[9],[10] про асоціативні алгебри, які є сумою двох своїх PI-алгебр, де доведено (при певних обмеженнях), що сума двох кілець з поліноміальною тотожністю є знову кільцем, яке задовольняє певну поліноміальну тотожність (див. також [[11],[12]]). Одним із узагальнень нільпотентних алгебр над полями є майже нільпотентні алгебри (асоціативна алгебра R над полем називається майже нільпотентною, якщо R містить нільпотентний ідеал

---

[7] M.Bhattacharjee. The probability of generating certain profinite groups by two elements // Israel journal of Mathematics.— 1994.— Vol. 86.— P.311—329.

[8] O.H.Kegel, Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe. Math. Ann. 149 (1963), 258– 260

[9] K.I.Beidar, A.V.Mikhalev. On rings which are sums of two PI-subrings. // In book "Fundamentalny voprosy math. i mechan."— P.1, Moscow University, 1994.

[10] K.I.Beidar, A.V.Mikhalev. Generalized polynomial identities and rings which are sums of two subrings // Algebra i Logika, 34 (1995), No.1.— P. 3–11.

[11] Y.Bahturin, A.Giambruno. Identities of sums of commutative subalgebras // Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 43, (1994), No.2. — P. 250–258.

[12] Y.Bahturin, O.H.Kegel. Universal sums of abelian subalgebras // Communications in Algebra, 23 (1995).— P. 2975–2990.

скінченної корозмірності). В роботі [13] було доведено, що будь-яка асоціативна алгебра R (над довільним полем), яка розкладається в суму $R = A + B$ двох майже нільпотентних підалгебр A і B (як підпросторів над основним полем) майже нільпотентна. Але при доведенні цього результату була використана некоректна лема 13 із цієї роботи і тому доведення було неповним. Повне доведення цього твердження, а також теореми 14 із роботи [13], яке базується на іншому підході, було дано в роботі [14]. У роботі [15] доведено більш загальне твердження, розглядаючи асоціативні алгебри R, які близькі до сум своїх нільпотентних підалгебр, а саме вивчено асоціативні алгебри R над полем, які містять дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що їх сума $A + B$ (як векторних підпросторів) має скінченну корозмірність в алгебрі R. Насправді, можна розглядати тільки випадок, коли обидві підалгебри A і B нескінченновимірні, оскільки загальний випадок може бути легко зведений до даного випадку використовуючи результати роботи [16].

Зокрема, у підрозділі 2.2 розглядаються асоціативні алгебри R, які близькі до сум своїх нільпотентних підалгебр. Зокрема, вивчаються асоціативні алгебри R над полем, які містять дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що їх сума $A +$B (як векторних підпросторів) має скінченну корозмірность в алгебрі R.

В алгебраїчній геометрії група біраціональних автоморфізмів n-вимірного проективного простору введена Луїджі Кремона (Luigi Cremona, 1830–1903) в 1863 році, а тому її ще називають групою Кремона. Великий вклад у розвиток даної теорії вніс також відомий французький математик-любитель, адмірал військово-морського флоту Франції Ернест де Жонк'єр (Ernest de Jonquieres, 1820-1907 рр.). Група Кремона ототожнюється з групою автоморфізмів поля

---

[13] Petravchuk A. On associative algebras which are sums of two almost commutative subalgebras // Publ. Math. Debrecen – 1998. – 53. – P. 191–206.

[14] M.Kepczyk, On algebras that are sums of two subalgebras satisfying certain polynomial identities // Publ. Math. Debrecen, 72, No. 3–4. — P.257 – 267.

[15] Лучко В.С., Петравчук А.П., Шевчик О.М. Про асоціативні алгебри з двома великими нільпотентними підалгебрами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2016. – №3. – С. 19-24.

[16] A.Mekey. On subalgebras of finite codimension // Stud. sci. math. hung., 27 (1992). P. 119–123.

раціональних функцій від n невідомих над даним полем.

Довільний бірегулярний (поліноміально оборотний) автоморфізм афінного простору A_K^n продовжується до кремонових перетворень простору P_K^n так, що $Aut(A_K^n) \subset Cr(P_K^n)$. Будова основних груп біраціональних перетворень навіть в найпростішому, афінному випадку, досліджена ще порівняно мало, сформульовано ряд проблем на цю тему, які на даний час залишаються відкритими.

У випадку біраціональних перетворень афінної площини ситуація є більш визначеною, але й тут теоретико-групові властивості всієї групи вивчено ще недостатньо, хоча вона представляє значний інтерес також як група автоморфізмів кільця многочленів від двох змінних над основним полем, або як група автоморфізмів вільної асоціативної алгебри з двома вільними твірними над ним.

Перетворення групи Кремона (автоморфізм кільця многочленів $K[x, y]$ над полем K) називається ручним, якщо воно є добутком так званних афінних та трикутних перетворень. У 1942 р. Юнг (Jung H.W.E,) довів, що кожне перетворення з афінної групи Кремона $Aut(A_K^2)$ вимірності 2 є ручним над полем комплексних чисел, а в 1953 році Ван дер Кулк (W. van der Kulk) узагальнив цей результат на довільні поля характеристики нуль, тобто встановив, що ручним є кожен автоморфізм із $Aut(A_K^2)$, де K – поле характеристики нуль. Пізніше було уточнено, що група $Aut(A_K^2)$ розкладається на амальгамований вільний добуток своїх підгруп трикутних автоморфізмів $J_2(K)$ і афінних автоморфізмів $Aff_2(K)$. Група $Aff_2(K)$ вивчена добре, а тому виникає питання дослідження будови і властивостей групи трикутних автоморфізмів $J_2(K)$, яку ще називають двовимірною афінною групою Жонк'єра або двовимірною групою елементарних перетворень над полем K. Ця група розкладається в напівпрямий добуток підгрупи діагональних автоморфізмів (яка ізоморфна $K^* \times K^*$, де K^* – мультиплікативна група K) і групи унітрикутних автоморфізмів $UJ_2(K)$.

В останні три десятиліття опубліковано ряд робіт, в яких досліджуються властивості підгруп трикутних і унітрикутних автоморфізмів афінної групи

Кремона $Aut(A_K^2)$ і, більш загально, $Aut(A_K^n), n \geq 2$. Зокрема, у роботах Н. Іваненко[17],[18] вивчалися характеристичні та нормальні підгрупи групи унітрикутних атоморфізмів $UJ_n(K)$ многочленів від n змінних над полем характеристики нуль, а в роботі В. Бардакова, М. Нещадіма та Ю. Сосновського[19] — напівпрямі розклади, твірні і комутаторна будова груп $J_n(K), n \geq 2$ трикутних автоморфізмів кільця многочленів від довільного числа змінних. У роботі Д.Серво та Ж.Десерті[20] розглядаються централізатори елементів в групі Жонк'єра $J_2(K)$, а в роботі Ж. Десерті[21] — нільпотентні підгрупи групи Кремона $Aut(A_K^2)$. Основні результати, про групи $AutK[x,y] \cong Aut(A_K^2), J_2(K), UJ_2(K)$ встановлено над полями характеристики нуль. У випадку полів ненульової характеристики теорія таких груп практично не розглядалася.

У підрозділі 2.1 описано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи та алгоритм побудови двохелементних систем твірних вінцевого добутку $A_n \wr A_m$ двох знакозмінних груп та вказано конкретні системи твірних, які складаються лише з двох елементів.

У підрозділі 2.2 розглядаються асоціативні алгебри R, які близькі до сум своїх нільпотентних підалгебр. Зокрема, вивчаються асоціативні алгебри R над полем, які містять дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що їх сума $A + B$ (як векторних підпросторів) має скінченну корозмірность в алгебрі R.

У підрозділі 2.3 наведено теоретичні результати, які описують групові

---

[17] Іваненко Н. І. Характеристичні підгрупи групи Жонк'єра над полем характеристики нуль / Н. І. Іваненко // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47. – №1. – С. 111–113.

[18] Іваненко Н. І. Нормальна будова групи Жонк'єра над полем характеристики нуль / Н. І. Іваненко // Укр. мат. журн. – 1994. – Т. 46. – №6. – С. 692–698.

[19] Bardakov V. G. Groups of triangular automorphisms of a free associative algebra and a polynomial algebra / V. G. Bardakov, M. V. Neshchedim, Y. V. Sosnovsky //http://www.arxiv.org/pdf/1007.2711v1. – 16 Jul. 2010.– P. 1–19.

[20] Cerveau D. Centralisateurs dans le groupe de Jonquieres / D. Cerveau, J. Deserti // Michigan Math. J. – 2012. – 61.– P. 763–783.

[21] Deserti J. Sur les sous-groupes nilpotents du groupe de Cremona / J. Deserti // Bull. Braz. Math. Soc. New Series . – 2007. – 38. – №3.– P. 377–388.

властивості та теоретико-групову будову груп трикутних та унітрикутних автоморфізмів кілець многочленів від двох змінних над полями. Групи трикутних автоморфізмів досліджено для полів нульової характеристики, а групи унітрикутних автоморфізмів – для полів як нульової характеристики, так і характеристики $p > 0$, зокрема, скінченних полів.

III. Сьогодні освіта і наука в Україні, виходячи з євроінтеграційних прагнень, вимагає якісних змін у системі підготовки фахівців, зокрема з природничо-математичних дисциплін, перегляду цілей і завдань, змісту, форм і засобів навчально-пізнавальної діяльності суб’єктів навчання.

Реформування чинної системи математичної освіти в Україні зумовлює, передусім, необхідність з’ясування тенденцій процесу її змін. Одним із джерел відродження, становлення національної системи освіти є звернення до історичного досвіду, усталених освітніх традицій, у тому числі і математичної освіти, її змістовного наповнення відповідно до регіональних особливостей, типів закладів освіти, потреб соціального розвитку тощо.

Це дозволяє вибудовувати освітній простір в єдності його змістовних, функціональних і часопросторових характеристик, єдності освітньо-наукової та педагогічної думки минулого, сучасного та майбутнього.

В окресленому форматі вартими уваги науковців постають, зокрема, дослідження процесу розвитку математичної освіти і науки, її наукових шкіл у Чернівецькій області за радянської доби.

Висвітлення проблем математичної освіти і науки досліджуваного періоду є, з одного боку, можливістю розкрити процес державного підходу до розвитку математичної освіти у навчальних закладах краю, систему підготовки висококваліфікованих фахівців у галузі математики затребуваних виробництвом, а з іншого, – відтворити цілісну об’єктивну картину освітнього процесу, зокрема національного.

Обрана для дослідження тема має наукове, загальногуманітарне, культурноосвітнє і соціальне значення, сприятиме адекватному розумінню тенденцій, подій, фактів та вироблення стратегії щодо майбутнього розвитку математичної освіти і науки, що й обумовлює її актуальність. Висвітлення особливостей формування та розвитку математичної освіти і науки Чрнівецької області зазначеного періоду пов'язане формуванням регіональної математичної школи, її затребуваністю для економічного розвитку краю. Зазначеними проблемами займалися науковці Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, зокрема, В.М. Ботушанський, О.В. Добржанський, Г.К. Кожолянко, Ю.І. Макар та ін. Зокрема, в дисертаційних дослідженнях Д.М. Щербини, Р.П. Ростикуса описано особливості розвитку народної (Д.М. Щербина) та вищої (В.К. Боролюк, Р.П. Ростикус) освіти і науки за радянських часів.

Окремим питанням історії становлення та розвитку математичного факультету Чернівецького університету, його кафедр і науковцям присвячено праці Я.Й. Бігуна, С.Д. Івасишена, Р.Ф. Домбровського, В.В. Крехівського, В.П. Лавренчука, М.П. Ленюка, В.Т. Мартинюка, М.І. Матійчука, М.І. Нагнибіди, А.М. Садов'яка, А.Д. Семенюка, П.Ф. Яреми та ін. Загалом, проблема розвитку математичної освіти і науки Буковини і Північної Бесарабії зазначеного періоду не стала предметом спеціального вивчення в українській історіографії. Системним дослідженням становлення і розвитку математичної освіти і науки Чернівецької області присвячені окремі публікації І.В. Житарюка.

Підсумовуючи, варто зазначити, що переважна більшість досліджень проводилася істориками, педагогами-науковцями і відомими громадськими діячами буковинського краю та стосується певних сторін освітньої діяльності, кадрового і методичного забезпечення навчальних закладів краю тощо і слугують основою нашого дослідження. Наведена в публікаціях інформація висвітлює окремі періоди історії освіти і науки Чернівецької області та унеможливлює простежити лише на їх основі еволюцію математичної освіти і науки, упродовж досліджуваного періоду. Поза увагою залишився і системний підхід щодо вивчення математичних дисциплін, їх співвідношення у різнопрофільних навчальних закладах, аналіз навчально-методичного забезпечення, розвиток математичної науки в краї тощо. Програма-мінімум з математики формувалася так, щоб дати знання і уміння, необхідні, в першу чергу, для отримання освіти певного рівня, по-друге, – для майбутнього фахівця в галузі математики, техніка, інженера тощо. Реалізація вказаної програми відбувалася так, щоб теоретичні знання і практичні навички дозволяли тим, хто обере в майбутньому спеціальність математику чи техніку тощо, доучуватися у відповідному напрямку, а не переучуватися. Виходячи з цього, потребував системного дослідження процес розвитку математичної освіти і науки Чернівецької області в контексті освітніх процесів краю. Результати досліджень викладено у підрозділах 3.1-3.3.

Розділ I. ЕВОЛЮЦІЙНІ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ В ЗЛІЧЕННО НОРМОВАНИХ ПРОСТОРАХ

У розділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами або функціями від таких операторів, що діють в локально опуклих топологічних просторах, які є індуктивними або проективними границями зліченно нормованих просторів нескінченно диференційовних функцій. Якщо символами псевдодиференціальних операторів є аналітичні функції, то такі оператори слід трактувати як оператори диференціювання нескінченного порядку, які діють у відповідних топологічних простора.

Розвивається теорія нелокальної багатоточкової за часом задачі для зазначених еволюційних рівнянь у випадку, коли функція, за допомогою якої задається відповідна умова, є узагальненою функцією типу розподілів або ультрарозподілів.

1.1. Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь з аналітичними символами

У цьому підрозділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за символами, які допускають аналітичне продвоження у певну область комплексної площини (клас таких операторів містить і оператори Бесселя дробового диференціювання; нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних рівнянь з такими операторами на теперішній час не вивчені). Встановлюється у [1.3] структура та властивості фундаментального розв’язку, коректна розв’язність задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів, знайдено зображення розв’язку у вигляді згортки фундаментального розв’язку з граничною функцією, доведено, що розв’язок володіє властивістю локалізаії (властивість локального покращення збіжності).

1.1.1. Властивості фундаментального розв'язку багатоточкової задачі

В просторах типу S будуються псевдодиференціальні оператори вигляду $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(\sigma)F_{x\to\sigma}]$ з символами, які допускають аналітичне продовження в певну область комплексної площини. А саме, нехай $\omega \in (1,+\infty)\backslash\{2,3,4,\dots\}$, $\mu \in (-\infty,0]$ – фіксовані параметри, функція-символ $a(x)$, $x \in \mathbb{R}$, є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$, при цьому

$$\exists B > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall m \in \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}: |D_x^m a(x)| \le c_\varepsilon B^m m^m exp(\varepsilon|x|^\omega);$$

$$\exists b_0 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}: a(x) \ge b_0|x|^\omega;$$

функція a допускає аналітичне продовження в область

$$G_\mu \coloneqq \{z = x + iy \in \mathbb{C}: |y| \le K(1+|x|)^\mu, x \in \mathbb{R}, K > 0\}$$

комплексної площини; функція $exp\big(-a(z)\big), z \in G_\mu$, задовольняє нерівність

$$\left|e^{-a(x+iy)}\right| \le \overline{L}_0 e^{-\overline{\alpha}_0|x|^\omega}, z = x + iy \in G_\mu,$$

з деякими сталими $\overline{L}_0, \overline{\alpha}_0 > 0$, залежними лише від функції a. Із властивостей функції a випливає, що ця функція є мультиплікатором у просторі $S^{1-\mu/\omega}_{1/\omega}$, а $e^{-a(x)}$ є елементом простору $S^{1-\mu/\omega}_{1/\omega}$. Звідси дістається, що в просторі $S^{1-\mu/\omega}_{1/\omega}$ визначений, є лінійним і неперервним псевдодиференціальний оператор A, побудований за функцією a як за символом:

$$A\varphi = F^{-1}[a(\sigma)F[\varphi](\sigma)], \varphi \in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}.$$

Зокрема, якщо $a = a_\omega$, де $a_\omega(x) = (1+x^2)^{\omega/2}, x \in \mathbb{R}$, то оператор $A \equiv A_\omega$ є конструктивною реалізацією оператора $(I - \Delta)^{\omega/2}, \omega \ne 2,4,6,\dots$: $A_\omega\varphi = (I-\Delta)^{\omega/2}\varphi,\ \Delta = D_x^2,\ \varphi \in S_1^{1/\omega}$, при цьому оператор A_ω називається оператор Бесселя дробового диференціювання.

Для еволюційного рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + Au(t,x) = 0, (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1.1}$$

ставиться нелокальна багатоточкова за часом задача: знайти розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t,\cdot)|_{t=t_k} = \varphi, \tag{1.2}$$

де $\varphi \in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}, m \in \mathbb{N}, \{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty), \{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > m \sum_{k=1}^{m} \mu_k, 0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$.

Розв'язок задачі (1.1), (1.2) шукається за допомогою перетворення Фур'є, при цьому $u(t, x)$ зображується у вигляді згортки $\Gamma(t, x) * \varphi(x)$, де $\Gamma(t, x)$ – фундаментальний розв'язок задачі (1.1), (1.2), $\Gamma(t, x) = F^{-1}[Q(t,\cdot)]$, де

$$Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) \cdot Q_2(\sigma), Q_1(t, \sigma) = exp\big(-ta(\sigma)\big),$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k exp\big(-t_k a(\sigma)\big)\right)^{-1} = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k Q_1(t_k, \sigma)\right)^{-1}.$$

Функція $Q(t,\cdot)$, як функція σ, є елементом простору $S^{1-\mu/\omega}_{1/\omega}$ (при кожному $t > 0$). Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та співвідношення $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega} = F^{-1}\left[S^{1-\mu/\omega}_{1/\omega}\right]$ отримуємо, що $\Gamma(t,\cdot) \in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$ при кожному $t \in (0, T]$.

Основні властивості функції $\Gamma(t,\cdot)$ даються в наступних твердженнях.

Лема 1.1. *Для функції $\Gamma(t, x), (t, x) \in \Omega$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності*

$$|D^s_x \Gamma(t, x)| \leq \tilde{c} B^s s^{s/\omega} t^{-(s+1)/\omega} exp\left\{-a_0\big(t^{-\mu/(\omega-\mu)}|x|\big)^{1/(1-\mu/\omega)}\right\},$$

сталі $a_0, \tilde{c}, B > 0$ не залежать від t.

Лема 1.2. *Функція $\Gamma(t,\cdot), t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, диференційовна по t.*

Лема 1.3. *У просторі $\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\right)'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} \Gamma(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m} \mu_l \lim_{t\to t_l} \Gamma(t,\cdot) = \delta.$$

Наслідок 1.1. *Нехай $\omega(t, x) = f * \Gamma(t, x), f \in \left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega,*}\right)', (t, x) \in \Omega$. Тоді в просторі $\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\right)'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \underset{t\to+0}{lim}\,\omega(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k \underset{t\to t_k}{lim}\omega(t,\cdot)=f$$

(тут символом $\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega,*}\right)'$ *позначено клас узагальнених функцій з* $\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\right)'$*, які є згортувачами в просторі* $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$*).*

1.1.2. Коректна розв'язність m-точкової задачі. Властивість локалізації розв'язків

З наслідку 1.1 випливає, що для рівняння (1.1) m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (1.1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k}u(t,\cdot)=f, f\in\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega},*\right)', \qquad (1.3)$$

де границі розглядаються в просторі $\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\right)'$ (обмеження на параметри $\mu,\mu_1,\dots,\mu_m,t_1,\dots,t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (1.1), (1.2)).

Справедлива теорема

Теорема 1.1. *Задача (1.1), (1.3) є коректно розв'язною. Розв'язок дається формулою:*

$$u(t,x)=f*\Gamma(t,x),(t,x)\in\Omega,$$

$u(t,\cdot)\in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

Функція $\Gamma(t,\cdot)$ є неперервною абстрактною функцією параметра $t\in(0,T]$ із значеннями в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. Оскільки узагальнена функція f в (1.3) – згортувач у просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, то граничні співвідношення

$$u(t,\cdot)=f*\Gamma(t,\cdot)\underset{t\to t_i}{\longrightarrow}f*\Gamma(t_i,\cdot)=u(t_i,\cdot),t_i\in(0,T],i\in\{1,\dots,m\},$$

справджуються в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. Із означення збіжності в цьому просторі випливає, зокрема, що $u(t,\cdot)\to u(t_i,\cdot)$ при $t\to t_i, i\in\{1,\dots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Вказану збіжність в (1.3) погіршує перший доданок, оскільки для функції $\Gamma(t,\cdot)$ точка $t=0$ є особливою. Однак з'ясовується, що якщо граничну функцію f брати з вужчого, ніж $\left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\right)'$,

$1/\omega < 1$, класу, а саме з класу $\left(S^{\beta}_{1-\mu/\omega}\right)'$, де $\beta > 1$, то можна отримати локальне посилення збіжності згортки $f * \Gamma(t,\cdot)$ при $t \to +0$.

Символом M_s позначимо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$, де $\beta \geq 1 + (1-\mu)/\omega$.

Правильним є таке твердження.

Теорема 1.2 (властивість локалізації). *Нехай* $f \in \left(S^{\beta}_{1-\mu/\omega}\right)' \subset \left(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}\right)'$, *де* $\beta \geq 1 + (1-\mu)/\omega$, $u(t,x)$ *– розв'язок задачі (1.1), (1.3) з початковою функцією* f. *Якщо узагальнена функція* f *збігається на інтервалі* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *з функцією* $g \in M_s$, *то на довільному проміжку* $[c,d] \subset (a,b)$ *граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,x) = g(x)$$

справджується рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

1.2. Еволюційні рівняння з гармонійним осцилятором

У підрозділі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором та функціями від такого оператора. Розв'язок багатоточкової задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з функцією, за допомогою якої задається відповідна багатоточкова умова і яка ототожнюється з її рядом Фур'є-Ерміта, досліджені властивості фундаментального розв'язку, встановлено коректну розв'язність задачі у випадку, коли початкова функція є елементом простору $\left(S^{1/2}_{1/2}\right)$.

1.2.1. Простори основних та узагальнених елементів

Нехай A – невід'ємний самоспряжений оператор з дискретним спектром у сепарабельному гільбертовому просторі H зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, $\{e_k, k \geq 1\}$ – ортонормований базис з його власних векторів, $\{\lambda_k, k \geq 1\}$ – послідовність відповідних власних чисел, розміщених у порядку зростання; при цьому кожне власне число береться стільки разів, якою є його кратність, $\sum_{k:\lambda_k\neq 0} \lambda_k^{-p} < +\infty$ при деякому $p > 0$.

Позначимо

$$\Phi_m = \left\{\varphi \in H | \varphi = \sum_{k=1}^{m} c_{k,\varphi} e_k, c_{k,\varphi} \in \mathbb{C}\right\}, \Phi = \lim_{m\to\infty} ind \Phi_m$$

(очевидно, що Φ лежить щільно в H і є інваріантним відносно A), Φ' – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Елементи з Φ' називаються узагальненими.

Нехай $f \in \Phi'$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, де $c_k =< f, e_k >$, називається рядом Фур'є елемента $f \in \Phi'$, а числа c_k – його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента $f \in \Phi'$ його ряд Фур'є збігається в Φ'до f. Навпаки, довільний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ збігається в Φ' до деякого елемента $f \in \Phi'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f. Отже, Φ' можна розуміти як простір формальних рядів вигляду $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Звідси випливає також, що Φ лежить щільно в Φ'.

Введемо деякі класи елементів, пов'язаних з оператором A. Позначимо

$$G_{\beta,B}(A) := \left\{\varphi \in H | \ \exists c, B > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: ||A^n \varphi|| \le c B^n n^{n\beta}\right\},$$

де $\beta > 0$ – фіксований параметр. $G_{\beta,B}(A)$ – банаховий простір відносно норми $\|\varphi\|_{\beta,B} = \sup_n \left(\|A^n\varphi\|/\left(B^n n^{n\beta}\right)\right)$. Простір $G_\beta(A) := \lim_{B\to\infty} ind G_{\beta,B}(A)$ називається простором Жевре порядку $\beta > 0$, породженим оператором A.

У просторі Φ' визначається операція "$*$", яка називається "абстрактною згорткою" (або просто згорткою), за правилом

$$f_1 * f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) c_k(f_2) e_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,(f_1 * f_2) e_k\,,$$

якщо $f_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_1) e_k \in \Phi'$, $f_2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_2) e_k \in \Phi'$, тобто $f_1 * f_2$ – узагальнений елемент з простору Φ', коефіцієнти Фур'є якого пов'язані з коефіцієнтами Фур'є узагальнених елементів f_1, f_2 співвідношенням $c_k\,(f_1 * f_2) = c_k(f_1) c_k(f_2)$.

1.2.2. Функції Ерміта. Формальні ряди Фур'є-Ерміта

Функції Ерміта мають вигляд

$$h_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (2^n \cdot n!)^{-1/2} e^{x^2/2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

ці функції утворюють ортонормований базис в просторі $L_2(\mathbb{R})$ і є власними функціям оператора $A = -d^2/dx^2 + x^2$ (гармонійного осцилятора) і відповідають власним числам $\lambda_k = 2k+1, k \in \mathbb{Z}_+$.

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$, де $c_k = < f, h_k >$, називається рядом Фур'є-Ерміта узагальненої функції $f \in \Phi'$, а числа $c_k, k \in \mathbb{Z}_+$, – її коефіцієнтами Фур'є. Простір Φ' у даному конкретному випадку розуміємо як простір формальних рядів вигляду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$.

Із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів в гільбертовому просторі з дискретним оператором випливає, що простори $S_{\beta/2}^{\beta/2} = G_{(\beta)}(A)$, $\left(S_{\beta/2}^{\beta/2}\right)' = G'_{(\beta)}(A), \beta \geq 1$, характеризуються так. Якщо $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi'$, $c_k = < f, h_k >$, то правильними є такі співвідношення еквівалентності:

а) $\left(f \in S_{\beta/2}^{\beta/2}\right) \Leftrightarrow \left(\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \leq c exp\left\{-\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\right\}\right)$;

б) $\left(f \in \left(S_{\beta/2}^{\beta/2}\right)'\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ : |c_k| \leq c\exp\left\{\mu(2k+1)^{1/(2\beta)}\right\}\right).$$

1.2.3. Функції від гармонійного осцилятора

Розглядається функція $f(A)$ від гармонійного осцилятора A у припущені, що $f: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – неперервна функція, яка монотонно зростає на $[0, +\infty)$, $\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$. При цьому

$$(f(A)\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) c_k(\varphi) h_k(x), \varphi \in D(f(A)) \subset L_2(\mathbb{R}),$$

де

$$D(f(A)) = \left\{\varphi \in L_2(\mathbb{R}) | \sum_{k=0}^{\infty} f^2(\lambda_k) |c_k(\varphi)|^2 < \infty, \lambda_k = 2k+1\right\},$$

$f(\lambda_k)$ – власні числа оператора $f(A)$. Надалі оператор $f(A) \equiv A_f$ розумітимемо як звуження оператора $f(A)$ на простір $S_{1/2}^{1/2} = G_1(A) \subset L_2(\mathbb{R})$. Правильним є таке твердження.

Лема 1.4. *Якщо* $G_f := \sum_{k=0}^{\infty} f(\lambda_k) h_k \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, *то оператор* A_f *є неперервним у просторі* $S_{1/2}^{1/2}$.

Умова $G_f \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$ еквівалентна такій умові на функцію f:

$$\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 : 0 \le f(\lambda) \le c e^{\mu \lambda}, \lambda \in [0, +\infty).$$

Надалі вважатимемо, що функція f додатково задовольняє умову:

$$\exists d_0 > 0 \forall \lambda \in [0, +\infty) : f(\lambda) \ge d_0 \lambda.$$

1.2.4. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u / \partial t + A_f u = 0, (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1.4}$$

де A_f – оператор, побудований у пункті 1.2.3. Під розв'язком рівняння (1.4) розумітимемо функцію, яка задовольняє це рівняння та умову

$$\mu u(0, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \, u(t_k, \cdot) = g, \;\; g \in L_2(\mathbb{R}), \tag{1.5}$$

де $m \in N, \{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty), \{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ – фіксовані числа, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $0 < t_1 < \dots < t_m \le T$. Задачу (1.4), (1.5) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (1.4). Правильним є наступне твердження.

Теорема 1.3. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (1.4), (1.5) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою* $u(t, x) = G(t, x) * g(x), (t, x) \in \Omega$, *де*

$$G(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x), \;\; g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(g) h_k \in L_2(\mathbb{R}),$$

при цьому $\{G(t, \cdot), u(t, \cdot)\} \subset S_{1/2}^{1/2}$ *при кожному* $t \in (0, T]$.

Операцію "$*$" можна розглядати і у випадку, коли $g \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)' = G'_{\{1\}}(A)$,при цьому, внаслідок відповідної властивості вказаної операції, $u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * g \in S_{1/2}^{1/2}$ при кожному $t \in (0,T]$, функція $u(t,\cdot)$ є розв'язком рівняння (1.4), але умову (1.5), де $g \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$, $u(t,\cdot)$ задовольняє в тому розумінні, що

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g, g \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)',$$

де границі розглядаються в просторі $\in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)'$.

Зазначимо також, що правильним є твердження.

Лема 1.5. *Для функції*

$$u(t,x) = G(t,x) * g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k h_k(x), (t,x) \in \Omega,$$

де

$$G(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x), g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \left(S_{1/2}^{1/2}\right)',$$

$$c_k =< g, h_k >, k \in \mathbb{Z}_+,$$

правильним є зображення

$$u(t,x) =< g, G_{t,x}(\cdot) >, G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(y).$$

1.3. Еволюційні псевдодиференціальні рівняння в просторах типу W

У підрозділі встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку зі сталими символами та початковими умовами в просторах узагальнених функцій типу W'. Досліджена структура та властивості фундаментального розв'язку зазначеної задачі для еволюційного рівняння із оператором диференціювання нескінченного порядку, побудованим за змінним символом; встановлена розв'язність такої задачі в класі неперервних обмежених на $\mathbb{R}$ функцій.

1.3.1. Простори типу W та W'

Нехай Ω, M – диференційовні, парні на $\mathbb{R}$ функції, невід'ємні, зростаючі та опуклі донизу на $[0, +\infty)$, причому $M(0) = \Omega(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Omega(x) = +\infty$. За допомогою функцій M та Ω Б.Л. Гуревич увів простори $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$, названі ним просторами типу W. Зокрема, символом W_M^Ω позначається сукупність цілих функцій $\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, для яких

$$\exists c > 0\ \exists a > 0\ \exists b > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |\varphi(z)| \leq c\exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$$

(сталі $c, a, b > 0$ залежать лише від функції φ). У W_M^Ω вводиться топологія індуктивної границі просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, які складаються з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких правильні нерівності $|\varphi(x+iy)| \leq c\exp\{-M(\overline{a}x) + \Omega(\overline{b}y)\}, z = x + iy \in \mathbb{C}$, де $\overline{a}$ – довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ – довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\| \varphi \|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}} \left[|\varphi(z)|\exp\{M(a(1-\delta)x) - \Omega((b+\rho)y)\}\right], \{\delta, \rho\} \subset \{1/n, n \geq 2\},$$

то $W_{M,a}^{\Omega,b}$ з цими нормами перетворюється в досконалий зліченно нормований простір.

У просторах W_M^Ω визначені і неперервні операції диференціювання та множення на незалежну змінну. Мультиплікатором у просторі W_M^Ω є кожна ціла функція $g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}: |g(z)| \leq c_\varepsilon\exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}.$$

Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами простору W_M^Ω, позначається символом $W_M^\Omega(\mathbb{R})$.

Простори типу W перетворенням Фур'є відображаються у простори типу W, а саме, правильною є формула $F[W_M^\Omega(\mathbb{R})] = W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω, при цьому оператор Фур'є $F: W_M^\Omega(\mathbb{R}) \longrightarrow W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ є неперервним.

Символом $W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}$ позначається сукупність усіх цілих парних функцій з простору W_M^{Ω}. Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і які, як функції комплексної змінної, є елементами простору $W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}$, позначатимемо символом $W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Якщо ціла функція $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$ – мультиплікатор у просторі W_M^{Ω}, то в просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}$ визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку $\varphi(D) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, (-iD)^n, D = d/dz$.

Аналогічно, якщо ціла парна функція $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}\, z^{2n}$ є мультиплікатором у просторі $W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}$, то в просторі $W^{\circ}{}_{M_1}^{\Omega_1}$ визначений і є неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку

$$\varphi(B_{\nu,z}) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}(-1)^n\, B_{\nu,z}^n,\ B_{\nu,z} = -d^2/dz^2 + (2\nu+1)z^{-1}d/dz,\ z \in \mathbb{C}.$$

Якщо A_{φ} – звуження оператора $\varphi(B_{\nu,z})$ на простір $W^{\circ}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то для довільної функції $\psi \in W^{\circ}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ правильною є рівність

$$(A_{\varphi}\psi)(x) = F_{B_\nu}^{-1}\big[\varphi(\xi)F_{B_\nu}[\psi](\xi)\big](x), \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R},$$

тут $F_{B_\nu}, F_{B_\nu}^{-1}$ – пряме та обернене перетворення Бесселя.

W' та $W^{\circ\prime}$ – простори усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, їх елементи називаються узагальненими функціями.

Перетворення Фур'є (перетворення Бесселя) узагальненої функції $f \in \left(W_M^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$ ($f \in \left(W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$) визначається як узагальнена функція, задана на просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ (на просторі $W^{\circ}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$)) за формулою:

$$< F[f], \varphi > = < f, F[\varphi] >, \quad \forall \varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$$

$$\left(< F_{B_\nu}[f], \varphi > = < f, F_{B_\nu}[\varphi] >, \quad \forall \varphi \in W^{\circ}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})\right).$$

Якщо узагальнена функція $f \in \left(W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})\right)'$ – згортувач у просторі $W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$, то для довільної функції $\varphi \in W^{\circ}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$ правильною є формула $F_{B_\nu}[f * \varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot$

$F_{B_\nu}[\varphi]$, при цьому регулярна узагальнена функція $F_{B_\nu}[f]$ – мультиплікатор у просторі $W^{\circ}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$.

1.3.2. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку

Символом P_M^Ω позначатимемо клас цілих функцій $\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторі W_M^Ω і такі, що $e^\varphi \in W_M^\Omega$.

Звуження оператора $\varphi(D)$, розглянутого в підпункті 1.3.1, на простір $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ позначатимемо символом A_φ і називатимемо диференціальним оператором нескінченного порядку в просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, при цьому $(A_\varphi\psi)(x) = F^{-1}[\varphi(\xi)F[\psi](\xi)](x), \forall\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}), \varphi \in P_M^\Omega,$ тобто оператор $A_\varphi: W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) \longrightarrow W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ можна розуміти як псевдодиференціальний оператор, побудований за функцією $\varphi \in P_M^\Omega$ (тут Ω_1 та M_1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω).

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u/\partial t = A_\varphi u, \quad (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R} \equiv \Pi_T, \tag{1.6}$$

де A_φ – псевдодиференціальний оператор (оператор диференціювання нескінченного порядку), діючий у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Для (1.6) задамо багатоточкову нелокальну за часом умову

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)|_{t=t_1} - \dots - \mu_m u(t,\cdot)|_{t=t_m} = f, \tag{1.7}$$

де $\mu > m\sum_{k=1}^m \mu_k$, $f \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Під розв'язком задачі (1.6), (1.7) розумітимемо функцію, яка задовольняє рівняння (1.6) та умову (1.7).

Розв'язок задачі (1.6), (1.7) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є. У результаті дістаємо, що

$$u(t,x) = G(t,x) * f(x), \text{де } G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\sigma)], Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma),$$

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}, Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}, x \in \mathbb{R}$$

при цьому для функції $G(t,\cdot)$ правильним є зображення:

$$G(t,x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\mu^{r+1}} \sum_{r_1+\cdots+r_m=r} \frac{r!\,\mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} \tilde{G}(t_1 r_1 + \cdots + t_m r_m + t, x),$$

де

$$\tilde{G}(t_1 r_1 + \cdots + t_m r_m + t, x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{(t_1 r_1 + \cdots + t_m r_m + t)\varphi(\sigma)} \cdot e^{i\sigma x} d\sigma,$$

$\tilde{G}(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (1.6), тобто $\tilde{G}(t,x) = F^{-1}[Q_1(t,\cdot)](x)$.

Функція $G(t,\cdot), t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, диференційовна по t, при цьому в просторі $\left(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})\right)'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} G(t,\cdot) = \delta. \quad (1.8)$$

З (1.8), як наслідок, дістається граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \omega(t,\cdot) = f, f \in \left(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),*\right)', \quad (1.9)$$

яке виконується в просторі $\left(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})\right)'$ (тут $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, символом $\left(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),*\right)'$ позначається клас згортувачів у просторі $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$).

Урахувавши (1.9), для рівняння (1.6) m-точкову за часом задачу ставимо так: знайти розв'язок рівняння (1.6), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, f \in \left(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}),*\right)', \quad (1.10)$$

де граничне співвідношення (1.10) розглядається в просторі $\left(W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})\right)'$

Правильним є наступне твердження.

Теорема 1.4. *Задача (1.6), (1.10) коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою* $u(t,x) = f * G(t,x), (t,x) \in \Pi_T$, $u(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

1.3.3. Сингулярні еволюційні рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку

Розглядається еволюційне рівняння вигляду

$$\partial u/\partial t = A_f u, \quad (t,x) \in \Pi_T, \tag{1.11}$$

де A_f – оператор Бесселя нескінченного порядку (див. підпункт 1.3.1), який діє в просторі $W^{\circ}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ (тут Ω_1, M_1 – функції, двоїсті за Юнгом до функцій M та Ω відповідно). Для рівняння (1.11) ставиться нелокальна m-точкова за часом задача, коли відповідна початкова функція є елементом простору $\left(W^{\circ}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),*\right)'$:

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = \varphi, \varphi \in \left(W^{\circ}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),*\right)', \tag{1.12}$$

Для задачі (1.11), (1.12), використавши метод перетворення Бесселя, отримаємо

Теорема 1.5. *Задача (1.11), (1.12) коректно розв'язна. Розв'язок дається формулою* $u(t,x) = \varphi * G(t,x), (t,x) \in \Pi_T,\ u(t,\cdot) \in W^{\circ}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

1.3.4. Еволюційні рівняння із псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами

У даному підпункті розглядається еволюційне рівняння із псевдодиференціальним оператором, побудованим за змінним символом $a(t,x;\sigma)$. Функція $a(t,x;\sigma)$ задана на $[0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ задовольняє умови:

1) $a(t,x;\sigma)$ – неперервно диференційовна функція аргумента $t \in [0,T]$ (при фіксованих x,σ); $a(t,x;\sigma)$ – неперервно диференційовна обмежена на $\mathbb{R}$ функція аргумента x (при фіксованих t,σ);

2) при фіксованих t,x функція $a(t,x;\sigma)$, як функція змінної σ, допускає аналітичне продовження в комплексну площину; $a(t,x;\cdot) \in P^{\Omega}_{M}$.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор A, побудований за символом $a(t,x;\sigma)$:

$$(A\psi)(x) \coloneqq F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}[\psi(x)](\sigma)](x), \forall\psi \in W^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}).$$

Із властивостей функції $a(t,x;\sigma)$ випливає, що $A\psi \in K(\mathbb{R})$ при кожному $t \in [0,T]$, де $K(\mathbb{R})$ - нормований простір, який складається з неперервних обмежених на $\mathbb{R}$ функцій φ з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x)|$. Зазначимо, що A можна розуміти як оператор диференціювання нескінченного порядку: $A = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t,x)(-iD_x)^k$, за умови, що $a(t,x;\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t,x)\sigma^k$ - ряд Тейлора функції-символа a за змінною σ (при фіксованих t,x).

У смузі $\Pi_T' = \{(t,x): 0 \le \tau < t \le T,\ x \in \mathbb{R}\}$ розглядається задача про знаходження розв'язку еволюційного рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t = Au(t,x),\ \ (t,x) \in \Pi_T', \tag{1.13}$$

який задовольняє умови: $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$,

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} u_1(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u_1(t,x) = \varphi(x) \tag{1.14}$$

$$\lim_{t\to\tau+0} u_2(t,x) = 0, \tag{1.15}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$для фіксованої функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$ такі ж, як і у випадку задачі (1.1), (1.2)). Задачу (1.13)-(1.15) називатимемо нелокальною m-точковою за часом задачею для рівняння (1.13).

Під фундаментальним розв'язком задачі (1.13)-(1.15) розумітимемо функцію $Z(t,x;\tau,\xi) = V(t,x;\tau,\xi) + \Gamma(t,x;\tau,\xi)$, $(t,x) \in \Pi'_T, 0 \le \tau < t \le T$,

$\xi \in \mathbb{R}$, яка володіє властивостями:

1)$LZ(t,x;\tau,\xi) = 0$, $L \equiv L(t,x;A,\partial/\partial t) := \partial/\partial t - A$, тобто Z, як функція t,x (при фіксованих τ,ξ) є розв'язком рівняння (1.13);

2) $\mu \lim\limits_{t\to\tau+0} \int\limits_{\mathbb{R}} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi - \sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k \lim\limits_{t\to t_k} \int\limits_{\mathbb{R}} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x)$,

$$\lim_{t\to\tau+0} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Для побудови функції Z використовується метод Леві. За функцію V вибирається фундаментальний розв'язок рівняння (1.13) з фіксованою точкою $t = \beta,\ x = z$. Другий доданок (функцію Γ) шукаємо у вигляді інтегрального оператора з ядром, щільність якого визначається з деякого інтегрального рівняння.

Досліджено властивості функцій V та Γ. Зокрема, встановлено, що функція LV задовольняє нерівність:

$$|LV(t,x;\tau,\xi)| \le c(t-\tau)^{-1/\alpha}\exp\{-a|x-\xi|\}, \quad \alpha > 2,$$

де сталі $c, a > 0$ не залежать від $t, \tau, t > \tau$. Крім того, правильною є нерівність

$$|\Gamma(t,x;\tau,\xi)| \le \tilde{c}(t-\tau)^{1-2/\alpha}\exp\left\{-\frac{a}{4}|x-\xi|\right\}, \quad \alpha > 2,$$

стала $\tilde{c} > 0$ не залежить від t, τ. На підставі останніх нерівностей доводиться твердження.

Теорема 1.6. *Нелокальна m-точкова задача для рівняння (1.13) з параметром $\tau = 0$ розв'язна в класі X, розв'язок зображається формулою*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} V(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi = u_1(t,x) + u_2(t,x),$$

$(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}$, $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, $u(t,x)$ *є неперервною обмеженою на* $\mathbb{R}$ *функцією змінної* x *при кожному* $t \in (0,T]$ *(X позначає простір, який складається з функцій* $\psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$ *з нормою* $\|\psi\| = \sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi(x)|$*).*

1.4. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами в просторах періодичних функцій

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики виникають різні класи узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій, тощо). Якщо розглядати періодичні узагальнені функції, то, як доведено в [[22]], всі ці класи вкладаються у просторі формальних тригонометричних рядів і

[22] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

повністю характеризуються поведінкою коефіцієнтів Фур'є своїх елементів. У цьому підрозділі розглядаються довільні тригонометричні ряди, які ототожнюються із узагальненими 2π-періодичними функціями як лінійними неперервними функціоналами, заданими на просторі тригонометричних поліномів. Детальна теорія узагальнених періодичних функцій наведена в [[23]]. У даному підрозділі обмежуємося тим випадком, коли основні функції визначені на $\mathbb{R}$.

1.4.1. Псевдодиференціальні оператори у просторах періодичних функцій

Нехай $\tilde{G}\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ – неперервна парна функція така, що $\tilde{G}(x) \geq |x|$, $x \in \mathbb{R}\backslash(-1,1)$. За допомогою функції $\tilde{G}$ у просторі T' побудуємо оператор $\hat{A}\colon T' \to T'$ за правилом

$$T' \ni f = \sum_{k\in Z} c_k(f)e^{ikx} \to \hat{A}f := \sum_{k\in Z} \tilde{G}(k)c_k(f)e^{ikx} \in T',$$

$$c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T'. Оператор $\hat{A}$ – згортувач у алгебрі T'. Справді, якщо розглянути узагальнену функцію

$$f_{\tilde{G}}(x) = \sum_{k\in Z} \tilde{G}(k)e^{ikx} \in T',$$

то для довільної узагальненої функції $f \in T'$ маємо

$$\hat{A}f = \sum_{k\in Z} \tilde{G}(k)c_k(f)e^{ikx} = f * f_{\tilde{G}},$$

бо

$$c_k(f * f_{\tilde{G}}) = c_k(f)c_k(f_{\tilde{G}}) = c_k(f)\tilde{G}(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $G(x) = |x|^\gamma, \gamma \geq 1, x \in \mathbb{R}$, то $\hat{A}$ збігається з оператором $\hat{A}_\gamma$ дробового диференціювання в T' [[24]]. Зазначимо, що сім'я операторів $\hat{A}_\gamma$ володіє властивостями:

---

[23] Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

[24] Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219с.

а) $\forall f \in T' \; \forall\{\alpha, \beta\} \subset (0, \infty)$: $\hat{A}_\alpha(\hat{A}_\beta f) = \hat{A}_{\alpha+\beta}(f)$;

б) $\forall f \in T'$: $\hat{A}_{2k} f = (-1)^k D_x^{2k} f$, $k \in N$.

Якщо A – звуження оператора $\hat{A}$ на простір $H = L_2[0,2\pi]$, то, як доведено в [25], A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(A)$, причому $T \subset \mathcal{D}(A)$. Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2[0,2\pi]$.

Нехай f: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ – деяка неперервна функція. За функцією f та оператором A побудуємо оператор $f(A)$:

$$f(A)\varphi := \sum_{k \in Z} f(\lambda_k) c_k(\varphi) e^{ikx}, \quad \lambda_k = \tilde{G}(k),$$

$$\tilde{G}(k) = \tilde{G}(-k), \quad k \in \mathbb{Z}, \forall \varphi \in H.$$

Тоді $f(A) := A_f$ – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною областю визначення

$$\mathcal{D}(A_f) = \{\varphi \in H : \sum_{k \in \mathbb{Z}} f^2(\lambda_k) |c_k(\varphi)|^2 \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(A_f \varphi)|^2 < \infty\},$$

причому $T \subset \mathcal{D}(A_f)$, $\sigma(A_f) = \{\tilde{G}(k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Зазначимо, що якщо неперервна на $[0, \infty)$ функція f задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c_\varepsilon > 0 \;\; \forall x \in [0, \infty): 0 \le f(x) \le c_\varepsilon \rho(\varepsilon x), \qquad (1.16)$$

то оператор A_f неперервний у просторі $H\langle m_k \rangle$ і відображає цей простір в себе.

Умова (1.16) на функцію f еквівалентна тому, що функція $F_f = \sum_{k \in Z} f(\lambda_k) e^{ikx} \equiv \sum_{k \in Z} f(G(k)) e^{ikx}$ є елементом простору $H'\langle m_k \rangle$.

1.4.2. Нелокальна багатоточкова за часом задача

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \qquad (1.17)$$

[25] Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219с.

де A_f – оператор, побудований у підпункті 1.4.1. Під розв'язком рівняння (1.17) розуміємо функцію $u(t,x)$, неперервно диференційовну по t при кожному $x \in \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння, $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}(A_f)$ при кожному $t \in (0,T]$.

Розглянемо задачу: знайти функцію u, яка є розв'язком рівняння (1.17) та задовольняє умову

$$\mu u(0,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k u(t_k,\cdot) = g, \quad g \in L_2[0,2\pi], \qquad (1.18)$$

де $m \in N$, $\{\mu,\mu_1,\dots,\mu_m\} \subset (0,\infty)$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$ – фіксовані числа, причому $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $t_1 < t_2 < \dots < t_m \le T$. При цьому $u(0,\cdot)$ розуміємо як $\lim\limits_{t\to+0} u(t,\cdot)$, де границя розглядається в гільбертовому просторі $H = L_2[0,2\pi]$, тобто вважаємо, що існує функція $u_0(\cdot) \in H$ така, що $\| u(t,\cdot) - u_0(\cdot) \|_H \to 0$, $t \to +0$, $u_0(x) \equiv u(0,x)$. Надалі задачу (1.17), (1.18) називатимемо нелокальною багатоточковою за часом задачею для рівняння (1.17).

Справедливі наступні твердження.

Теорема 1.7. *Нелокальна багатоточкова за часом задача (1.17), (1.18) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * g(x), \quad (t,x) \in \Omega,$$

де $G(t,x) = \sum_{k\in Z} Q_1(t,\lambda_k) Q_2(\lambda_k) e^{ikx}$, $\quad g(x) = \sum_{k\in Z} c_k(g) e^{ikx} \in H$,

$$Q_1(t,\lambda_k) := exp\{-tf(\lambda_k)\},$$

$$Q_2(\lambda_k) := (\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n exp\{-t_n f(\lambda_k)\})^{-1} \equiv (\mu - \sum_{n=1}^{m} \mu_n Q_1(t_n,\lambda_k))^{-1},$$

при цьому $\{G(t,\cdot), u(t,\cdot)\} \subset H\langle m_k\rangle$, $m_k = k!\,\rho_k$, *при кожному* $t \in (0,T]$.

Лема 1.6. *Функція* $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, *як абстрактна функція параметра* t *із значеннями в просторі* $H\langle m_k\rangle$ *, диференційовна по* t.

Лема 1.7. *Нехай*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \quad g \in H'\langle m_k\rangle, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Тоді в просторі$H'\langle m_k\rangle$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = g. \qquad (1.19)$$

Оскільки $u(t,x) = G(t,x)$, якщо $g = \delta \in H'\langle m_k\rangle$, то функція $G(t,x)$ є розв'язком рівняння (1.17) і з (1.19) випливає, що функція $G(t,x)$ в просторі $H'\langle m_k\rangle$ задовольняє граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{n=1}^{m} \mu_n \lim_{t\to t_n} G(t,\cdot) = \delta.$$

Надалі $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, називатимемо фундаментальним розв'язком багатоточкової за часом задачі для рівняння (1.17).

Правильним є наступне твердження.

Теорема 1.8. *Багатоточкова задача (1.17), (1.19) коректно розв'язна, її розв'язок зображається формулою*

$$u(t,x) = G(t,x) * g, \quad (t,x) \in \Omega,$$

$u(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

1.4.3. Властивість локалізації

Функція $G(t,\cdot)$ – фундаментальний розв'язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (1.17), є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі $H\langle k!\,\rho_k\rangle$. Оскільки гранична узагальнена функція $g \in H'\langle k!\,\rho_k\rangle$ – згортувач у просторі $H\langle k!\,\rho_k\rangle$, а розв'язок $u(t,\cdot)$ задачі (1.17), (1.19) подається у вигляді згортки $G(t,\cdot) * g$, то звідси дістаємо, що граничні співвідношення

$$u(t,\cdot) = G(t,\cdot) * g \underset{t\to t_i}{\longrightarrow} G(t_i,\cdot) * g = u(t_i,\cdot),$$

$$t_i \in (0,T], i \in \{1,\dots,m\}$$

виконуються в просторі $H\langle k!\,\rho_k\rangle$. Із означенням збіжності в цьому просторі випливає, зокрема, що $u(t,\cdot) \to u(t_i,\cdot)$ при $t \to t_i$, $i \in \{1,\dots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset [0,2\pi]$. Вказану збіжність в (1.19) погіршує перший доданок, оскільки для функції $G(t,\cdot)$ точка $t=0$ є особливою. Однак виявляється, що якщо граничну функцію g брати з вужчого, ніж $H'\langle k!\,\rho_k\rangle$ класу, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $G(t,\cdot)*g$ при $t\to +0$.

Розглянемо простір Жевре $H\langle k^{k\beta}\rangle \equiv G_{\{\beta\}}$ при $\beta>1$. Оскільки в такому просторі є фінітні функції, то для ультрарозподілу $g\in G'_{\{\beta\}}$, $\beta>1$, має зміст означення: узагальнена функція $g\in G'_{\{\beta\}}$, $\beta>1$, дорівнює нулеві на інтервалі $(a,b)\subset[0,2\pi]$, якщо $\langle g,\varphi\rangle=0$ для довільної основної функції $\varphi\in G_{\{\beta\}}$, $\beta>1$, носій якої міститься в (a,b).

Надалі вважатимемо, що функція f, за якою будується оператор A_f, додатково задовольняє умови: вона є парною, двічі неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією,

$$\forall\varepsilon>0\ \ \forall k\in\{0,1,2\}\ \exists c_{\varepsilon,k}>0\ \ \forall\sigma\in\mathbb{R}\colon |f^{(k)}(\sigma)|\le c_{\varepsilon,k}\rho(\varepsilon\sigma),$$

f – однорідна функція порядку $\gamma>1$, тобто $f(\lambda\sigma)=\lambda^{\gamma}f(\sigma)$, $\sigma\in\mathbb{R}$, для кожного $\lambda>0$. Крім того, вважаємо, що $G_{\{\beta\}}(\sigma)=|\sigma|$, $\sigma\in\mathbb{R}$.

При обґрунтуванні властивості локалізації використовуватимемо наступне допоміжне твердження.

Лема 1.8. *Нехай* $\Gamma(t,x)=F^{-1}_{\sigma\to x}[Q(t,\sigma)](x)$,

$$Q(t,\sigma)=Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma),\quad \sigma\in\mathbb{R}.$$

Якщо $x\neq 0$, *то функція* Γ *задовольняє нерівність*

$$|\Gamma(t,x)|\le ct^{\mu}|x|^{-2},\quad \mu=1-1/\gamma>0, x\neq 0,$$

стала $c>0$ *не залежить від* t *(тут* Q_1, Q_2 *– функції, розглянуті раніше).*

Теорема 1.9. *Нехай* $g\in G'_{\{\beta\}}$, $\beta>1$, *і* $g=0$ *на інтервалі* $(a,b)\subset[0,2\pi]$. *Тоді розв'язок задачі (1.17), (1.19) з граничною функцією* g *прямує до нуля при* $t\to+0$ *рівномірно на довільному відрізку* $[c,d]\subset(a,b)$.

Наслідок 1.2. Нехай $g \in G'_{\{\beta\}} \subset H'\langle k!\,\rho_k\rangle$, $\beta > 1$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі (0.3), (0.10) з граничною функцією g. Якщо $g = 0$ на інтервалі $(a,b) \subset \mathbb{R}$, то граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,x) = 0$$

справджується рівномірно відносно x на довільному відрізку $[c,d] \subset (a,b) \subset [0,2\pi]$.

Символом $M_{\{\beta\}}$ позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $G_{\{\beta\}}$, $\beta > 1$.

Теорема 1.10 (властивість локалізації). *Нехай* $g \in G'_{\{\beta\}} \subset H'\langle k!\,\rho_k\rangle, \beta > 1$, $u(t,x)$ *– розв'язок задачі (1.17), (1.19) з граничною функцією* g. *Якщо узагальнена функція* g *збігається на інтервалі* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *з* 2π*-періодичною функцією* $\psi \in M_{\{\beta\}}$, *то на довільному проміжку* $[c,d] \subset (a,b) \subset [0,2\pi]$ *граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,x) = \psi(x) \qquad (1.20)$$

виконується рівномірно відносно $x \in [c,d]$.

Розділ II. ГРУПИ, КІЛЬЦЯ – ДОСЛІДЖЕННЯ, БУДОВА

2.1. Мінімальні системи твірних деяких вінцевих добутків

У підрозділі описано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи та алгоритм побудови двохелементних систем твірних вінцевого добутку $A_n \wr A_m$ двох знакозмінних груп та вказано конкретні системи твірних, які складаються лише з двох елементів.

2.1.1. Нормальні підгрупи та мінімальні системи твірних гіпероктаедральної групи

Гіпероктаедральна група (група симетрій n-вимірного куба) — це група тих лінійних перетворень евклідового простору E_n, які діють на векторах ортонормованого базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ цього простору перестановками або замінами напрямків (тобто заміною $\bar{e}_i$ на $-\bar{e}_i$). Іншими словами, гіпероктаедральну групу можна розглядати як "найбільшу" кристалографічну групу гіперкубічної ґратки, яку визначають як групу, породжену всіма лінійними комбінаціями вигляду $\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x^k \bar{e}_k$, де x^k — інтегральні коефіцієнти та $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ — стандартний ортонормований базис n-вимірного евклідового простору E_n. Ця група має порядок $n! \cdot 2^n$ та, як абстрактна група, ізоморфна вінцевому добутку $S_n \wr Z_2$ симетричної групи S_n степеня n на циклічну групу Z_2. Гіпероктаедральні групи є одним з прикладів груп Вейля (типу B_n) — див., наприклад [26]. Основні відомості про будову гіпероктаедральних груп зібрано в оглядовій статті [27]. У роботі [28] побудовано мінімальні (щодо кількості елементів) системи твірних групи $H_n = S_n \wr Z_2$ (яку також називатимемо гіпероктаедральною). Даний підрозділ присвячено

---

[26] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1968. — 331с.

[27] Baake M. Structure and representations of the hyperoctahedral group // J. Math. Phys.— 25 (11), November 1984. — P.3171–3182.

[28] Сікора В.С. Двоелементні бази гіпероктаедральних груп // Вісник Київського університету. Серія фіз.–мат. науки.— 1999.— Вип.1.– С.87–93.

побудові аналогічних систем твірних для нормальних дільників групи H_n.

Елементами групи H_n є підстановки, які можна зображати у вигляді таблиць $u=[\sigma;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n]$, де $\sigma\in S_n$ — деяка підстановка множини $\{1,2,...,n\}$; $\alpha_i\in Z_2=\{\overline{0},\overline{1}\}$ (див. [3]). Добуток двох таблиць u та $v=[\tau;\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n]$ визначається рівністю $u\cdot v=\left[\sigma\cdot\tau\,;\alpha_1+\beta_{\sigma(1)},\alpha_2+\beta_{\sigma(2)},\ldots,\alpha_n+\beta_{\sigma(n)}\right]$ (де символ "+" позначає додавання в Z_2), а оберненою до u буде таблиця $u^{-1}=\left[\sigma^{-1};\alpha_{\sigma^{-1}(1)},\alpha_{\sigma^{-1}(2)},\ldots,\alpha_{\sigma^{-1}(n)}\right]$.

У роботі [2.3] описано нормальні дільники групи $H_n=S_n\wr Z_2$. Зокрема, доведено, що тривіальними нормальними дільниками в гіпероктаедральній групі H_n будуть вона сама та підгрупа

$$L=\{[\varepsilon;\alpha,\alpha,...,\alpha]\,|\,\alpha=\overline{1}\text{ або }\alpha=\overline{0}\}=<[\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]>,$$

тобто $H_n\trianglelefteq H_n$ та $L\trianglelefteq H$. Крім того, доведено, що нетривіальними нормальними дільниками є підгрупи:

$$G_n=A_n\wr Z_2=\{[\lambda;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\,|\,\lambda\in A_n,\alpha_i\in Z_2,i=\overline{1,n}\}\trianglelefteq S_n\wr Z_2;$$

$$W=\left\{[\pi;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\,|\,\pi\in S_n,\alpha_i\in Z_2,i=\overline{1,n},\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\overline{0}\right\}\trianglelefteq S_n\wr Z_2;$$

$$M=\left\{[\lambda;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\,|\,\lambda\in A_n,\alpha_i\in Z_2,i=\overline{1,n},\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\overline{0}\right\}\trianglelefteq A_n\wr Z_2;$$

причому $M\trianglelefteq W$;

$$K=\{[\varepsilon;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\,|\,\varepsilon\in A_n,\alpha_i\in Z_2,i=\overline{1,n}\}\trianglelefteq A_n\wr Z_2;$$

$$T=\left\{[\varepsilon;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]\,|\,\varepsilon\in A_n,\alpha_i\in Z_2,i=\overline{1,n},\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\overline{0}\right\}\trianglelefteq K\text{ та }T\trianglelefteq M,$$

причому описана вище підгрупа L є нормальним дільником ще й у підгрупі T.

Мінімальні системи твірних групи $H_n=S_n\wr Z_2$ побудовано в [3]. У роботі [2.3] побудовано мінімальні систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи H_n. Опишемо отримані результати.

Група L містить лише дві підстановки — $[\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]$ та $[\varepsilon;\overline{0},\overline{0},...,\overline{0}]$ — і є циклічною, породженою елементом $[\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]$. Тобто мінімальна система твірних групи L складається з однієї підстановки $h=[\varepsilon;\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}]$. Для інших нормальних підгруп в [2.3] доведено наступні твердження.

Теорема 2.1. *Для довільного натурального* $n\geq 4$ *мінімальними (щодо кількості елементів) системами твірних групи* $A_n \wr Z_2$ *є наступні:*

а) $\{u_1,u_2\}$*, якщо* $n\geq 5$ *— непарне, де*

$$u_1=[(1,2,...,n);\overline{1},\overline{1},...,\overline{1}], \quad u_2=[(3,4,...,n);\overline{0},\overline{0},\overline{1},\overline{0},...,\overline{0}];$$

б) $\{v_2,v_2\}$*, якщо* $n\geq 4$ *— парне, де*

$$v_1=[(1,2,...,n-1);\overline{1},\overline{0},...,\overline{0}], \quad v_2=[(2,3,...,n);\overline{0},\overline{0},...,\overline{0}].$$

Зауваження. При побудові мінімальних систем твірних групи $G_n=A_n \wr Z_2$ випадки $n=2$ і $n=3$ нами не розглядаються, як тривіальні, оскільки знакозмінні групи A_2 та A_3 — циклічні.

Теорема 2.2. *Для довільного* $n\geq 4$ *група* $W \trianglelefteq S_n \wr Z_2$ *є 2–породженою.*

Теорема 2.3. *Для довільного* $n\geq 5$ *група* M *є 2–породженою.*

Теорема 2.4. *Група* $K=\left\{[\varepsilon;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n] \mid \varepsilon\in A_n, \alpha_i\in Z_2, i=\overline{1,n}\right\}$ *для довільного натурального* $n\geq 3$ *є* n*–породженою.*

Теорема 2.5. *Група* T *для довільного натурального* $n\geq 3$ *є* $(n-1)$*–породженою.*

2.1.2. Системи твірних вінцевого добутку двох знакозмінних груп

Об’єктом дослідження підрозділу 2.1.2 є двохелементні системи твірних вінцевого добутку $A_n \wr A_m$ двох знакозмінних груп. Відомо (див., наприклад [[29], [30], [31], [32]]), що групи такого вигляду є 4-породженими, тобто містять “природні”

[29] Isaacs I.M., Thilo Zieschang. Generating symmetric groups // Math. Notes.– 1995.– 10.– P.734-738.

[30] Пикар С. О базисах симметрической группы // Кибернетический сборник, Москва: Мир, 1965.– Вып. 1.– С.7-34.

[31] Калужнин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и перестановки. —М.: Наука, 1985. – 112с.

[32] Сущанський В.І., Сікора В.С. Операції на групах підстановок. Теорія та застосування.– Чернівці: Технодрук, 2017.– 240 с.

системи твірних, що складаються з чотирьох підстановок. Даний підрозділ описує продовжує дослідження, проведені в статтях [33, 34, 35, 36, 37] про мінімальні (щодо кількості елементів) системи твірних вінцевого добутку таких груп.

Елементи вінцевого добутку $A_n \wr A_m$ будемо зображати у вигляді наборів $\sigma = [p; q_1, q_2, ..., q_n]$, де $p \in A_n$, $q_1, q_2, ..., q_n \in A_m$, які називатимемо таблицями. Добутком двох таблиць σ та $\rho = [x; y_1, y_2, ..., y_n] \in A_n \wr A_m$ буде таблиця $\sigma \cdot \rho = [p \cdot x; q_1 \cdot y_{p(1)}, q_2 \cdot y_{p(2)}, ..., q_n \cdot y_{p(n)}]$, одиничним елементом групи $A_n \wr A_m$ є $[\varepsilon; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]$ (де ε — тотожна підстановка), а оберненою до σ буде $\sigma^{-1} = [p^{-1}; q_{p^{-1}(1)}, q_{p^{-1}(2)}, ..., q_{p^{-1}(n)}]$. Наведемо допоміжне твердження про системи твірних знакозмінної групи A_k.

Лема 2.1. [5] *При довільному непарному $k \geq 5$ знакозмінна група A_k породжується підстановками* $(1,2,...,k)$, $(1,2,3)$ *або* $(1,2,...,k)$, $(3,4,...,k)$, *а при довільному парному $k \geq 4$ — підстановками* $(1,2,...,k-1)$, $(2,3,...,k)$.

Зазначимо, що вінцевий добуток $A \wr B$ транзитивної k-породженої групи підстановок A з системою твірних $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$ та l-породженої групи B з системою твірних $\{h_1, h_2, ..., h_l\}$ ($k, l \in \mathbb{N}$) породжується $k + l$ елементами стандартного вигляду: $[g_i; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]$, $[\varepsilon; h_j, \varepsilon, ..., \varepsilon]$, $i = 1, 2, ..., k$, $j = 1, 2, ..., l$, де ε — нейтральні елементи в групах A та B. Звідси, враховуючи лему 2.1, у роботі [2.6] отримано такі твердження.

---

[33] Сікора В.С. Мінімальні системи твірних скінченних гіпероктаедральних, мономіальних, метасиметричних та автоматних груп підстановок.– Чернівці: Технодрук, 2018.– 168 с.

[34] Сікора В.С. Двоелементні бази гіпероктаедральних груп // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.– 1999.– Вип. 1.– С.87–93.

[35] Сікора В.С. Розклади елементів мономіальних груп над скінченними полями за мінімальними базами // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.– 1999.– Вип. 3.– С.71–79.

[36] Сікора В.С. Діаметр графа Келі вінцевого добутку двох симетричних груп для двохелементної системи твірних // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Математика.– Чернівці: ЧДУ, 2000.– Вип. 76.– С.99–105.

[37] Заводя М.В., Сікора В.С. Двохелементні системи твірних вінцевого добутку двох знакозмінних груп // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.– 2002.– Вип. 2.– С. 54–63.

Лема 2.2. *Нехай n і m — числа однакової парності ($n,m \geq 5$). Тоді вінцевий добуток $A_n \wr A_m$ породжується підстановками*

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = [(1,2,...,n);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \beta_1 = [(1,2,3);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \\ &\gamma_1 = [\varepsilon;(1,2,...,m),\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \delta_1 = [\varepsilon;(1,2,3),\varepsilon,...,\varepsilon]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

при непарних n,m та

$$\begin{aligned} &\alpha_2 = [(1,2,...,n-1);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \beta_2 = [(2,3,...,n);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \\ &\gamma_2 = [\varepsilon;(1,2,...,m-1),\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \delta_2 = [\varepsilon;(2,3,...,m),\varepsilon,...,\varepsilon]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

при парних n,m.

Лема 2.3. *Нехай n і m — числа різної парності ($n,m \geq 5$). Тоді вінцевий добуток $A_n \wr A_m$ породжується елементами*

$$\begin{aligned} &\alpha_3 = [(1,2,...,n);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \beta_3 = [(1,2,3);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \\ &\gamma_3 = [\varepsilon;(1,2,...,m-1),\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \delta_3 = [\varepsilon;(2,3,...,m),\varepsilon,...,\varepsilon]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

при непарному n і парному m та

$$\begin{aligned} &\alpha_4 = [(1,2,...,n-1);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \beta_4 = [(2,3,...,n);\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \\ &\gamma_4 = [\varepsilon;(1,2,...,m),\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \delta_4 = [\varepsilon;(1,2,3),\varepsilon,...,\varepsilon]. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

при парному n і непарному m.

Нехай n,m — натуральні числа, $n,m \geq 5$. Уведемо позначення:

$$a = (1,2,...,n),\ b = (1,2,3),\ c = (1,2,...,n-1),\ d = (2,3,...,n) \in A_n;$$

$$x = (1,2,...,m),\ y = (1,2,3),\ z = (1,2,...,m-1),\ t = (2,3,...,m) \in A_m;$$

для довільних непарних n,m, де m не ділиться націло на 3:

$$\varphi_1 = [a;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_1 = [b;\varepsilon,\varepsilon,y,x,\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon]; \tag{2.5}$$

для довільних непарних n,m, що $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$:

$$\varphi_2 = [a;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_2 = [b;\varepsilon,\varepsilon,x,y,\varepsilon,...,\varepsilon]; \tag{2.6}$$

для довільних парних n,m, де $m-1$ не ділиться націло на 3:

$$\varphi_3 = [c;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_3 = [c \cdot d^{-1};\varepsilon,z,t,\varepsilon,...,\varepsilon]; \tag{2.7}$$

для довільних парних n,m, де $m-1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$:

$$\varphi_4 = [c;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_4 = [c^{-1} \cdot d;\varepsilon,z,z \cdot t^{-1},\varepsilon,...,\varepsilon,z]; \tag{2.8}$$

для непарного n та парного m, такого, що $m-1$ не кратне 3:

$$\varphi_5 = [a;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_5 = [b;\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon,z,t,\varepsilon,...,\varepsilon]; \tag{2.9}$$

для непарного n та парного m, такого, що $m-1 \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$:

$$\varphi_6 = [a;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_6 = [b;\varepsilon,z,z,z\cdot t^{-1},\varepsilon,...,\varepsilon]; \tag{2.10}$$

для парного n та непарного m, де не ділиться націло на 3:

$$\varphi_7 = [c;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_7 = [d;\varepsilon,\varepsilon,x,\varepsilon,...,\varepsilon,y]; \tag{2.11}$$

для парного n та непарного m, що $m \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$:

$$\varphi_8 = [c;\varepsilon,\varepsilon,...,\varepsilon], \quad \psi_8 = [c\cdot d^{-1};x,y,\varepsilon,...,\varepsilon]. \tag{2.12}$$

Використовуючи наведені допоміжні деми, у [2.6] доведена така

Теорема 2.6. *Для довільних натуральних $n,m \geq 5$ група $A_n \wr A_m$ породжується двома підстановками $\varphi_i, \psi_i (i = 1,2,...,8)$, заданих формулами (2.5) – (2.12) в залежності від значень n та m.*

Зауважимо, що при побудові двохелементних систем твірних групи $A_n \wr A_m$ випадки $n,m = 2,3$ є тривіальними, оскільки групи A_2 і A_3 є циклічними.

2.2. Асоціативні алгебри з двома великими нільпотентними підалгебрами

У даному підрозділі розглядаються асоціативні алгебри R, які близькі до сум своїх нільпотентних підалгебр. Зокрема, вивчаються асоціативні алгебри R над полем, які містять дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що їх сума $A + B$ (як векторних підпросторів) має скінченну корозмірность в алгебрі R.

2.2.1 Вивченню асоціативних кілець R, які є сумою $R = A + B$ двох своїх підкілець A і B з певними властивостями присвячено багато робіт різних авторів. Велика кількість результатів в цій області пов'язані з відомою теоремою О. Кегеля [[38]] про нільпотентність асоціативного (не обов'язково комутативного) кільця, яке є сумою двох своїх нільпотентних підкілець. Відзначимо також

[38] O.H.Kegel, Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe. Math. Ann. 149 (1963), 258– 260

результати К. Бейдара та А. Міхалєва [39,40] про асоціативні алгебри, які є сумою двох своїх PI-алгебр, де доведено (при певних обмеженнях), що сума двох кілець з поліноміальною тотожністю є знову кільцем, яке задовольняє певну поліноміальну тотожність (див. також [41, 42]). Одним із узагальнень нільпотентних алгебр над полями є майже нільпотентні алгебри (асоціативна алгебра R над полем називається майже нільпотентною, якщо R містить нільпотентний ідеал скінченної корозмірності). В роботі [43] було доведено, що будь-яка асоціативна алгебра R (над довільним полем), яка розкладається в суму $R = A + B$ двох майже нільпотентних підалгебр A і B (як підпросторів над основним полем) майже нільпотентна. Але при доведенні цього результату була використана некоректна лема 13 із цієї роботи і тому доведення було неповним. Повне доведення цього твердження, а також теореми 14 із роботи [13], яке базується на іншому підході, було дано в роботі [44]. У роботі [45] доведено більш загальне твердження, розглядаючи асоціативні алгебри R, які близькі до сум своїх нільпотентних підалгебр, а саме вивчено асоціативні алгебри R над полем, які містять дві нільпотентні підалгебри A і B такі, що їх сума $A + B$ (як векторних підпросторів) має скінченну корозмірність в алгебрі R. Насправді, можна розглядати тільки випадок, коли обидві підалгебри A і B нескінченновимірні, оскільки

---

[39] K.I.Beidar, A.V.Mikhalev. On rings which are sums of two PI-subrings. // In book “Fundamentalny voprosy math. i mechan.”— P.1, Moscow University, 1994.

[40] K.I.Beidar, A.V.Mikhalev. Generalized polynomial identities and rings which are sums of two subrings // Algebra i Logika, 34 (1995), No.1.— P. 3–11.

[41] Y.Bahturin, A.Giambruno. Identities of sums of commutative subalgebras // Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 43, (1994), No.2. — P. 250–258.

[42] Y.Bahturin, O.H.Kegel. Universal sums of abelian subalgebras // Communications in Algebra, 23 (1995).— P. 2975–2990.

[43] Petravchuk A. On associative algebras which are sums of two almost commutative subalgebras // Publ. Math. Debrecen – 1998. – 53. – P. 191–206.

[44] M.Kepczyk, On algebras that are sums of two subalgebras satisfying certain polynomial identities // Publ. Math. Debrecen, 72, No. 3–4. — P.257 – 267.

[45] Лучко В.С., Петравчук А.П., Шевчик О.М. Про асоціативні алгебри з двома великими нільпотентними підалгебрами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2016. – №3. – С. 19-24.

загальний випадок може бути легко зведений до даного випадку використовуючи результати роботи [46].

Розглянемо далі результати, наведені в [2.7].

2.2.2 Нехай A – ненульова нільпотентна алгебра над довільним полем K. Натуральне число n (яке залежить від алгебри A) таке, що

$$A^n = 0, A^{n-1} \neq 0$$

будемо називати індексом нільпотентності нільпотентної алгебри A і позначати через $n(A)$. Індекс нільпотентності нульової алгебри покладемо рівним 1.

Далі використовуємо стандартні позначення: основне поле K, над яким розглядаються всі асоціативні алгебри, довільне; якщо a – елемент асоціативної алгебри A, то лівий (правий) анулятор елемента визначається як

$$Ann_A^l(a) = \{r \in A | ra = 0\}$$

(та, відповідно, $Ann_A^r(a) = \{r \in A | ar = 0\}$).

Легко бачити, що лівий анулятор елемента a є лівим ідеалом алгебри A, а правий анулятор – правим ідеалом A. Далі, нехай U, V – підпростори векторного простору W над полем K. Підпростір V будемо називати для зручності скінченновимірним над U, якщо $\dim(V + U)/U < \infty$.

Асоціативну алгебру A будемо називати майже нільпотентною, якщо вона містить нільпотентний ідеал скінченної корозмірності. Через $\bar{n}$(A) будемо позначати найменший індекс нільпотентності всіх нільпотентних ідеалів скінченної корозмірності майже нільпотентної алгебри A (легко бачити, що $\bar{n}$(A) визначено коректно). Двосторонні ідеали алгебри R часто будемо називати просто ідеалами. В подальшому ми будемо використовувати наступне твердження: якщо $W_1, \dots, W_k$ – підпростори векторного простору V і $\dim V/W_i < \infty$, $i = 1, \dots, k$, то перетин $\cap_{i=1}^k W_i$ всіх цих підпросторів має також скінченну корозмірність в просторі V.

При доведенні основного результату статті [2.7] використано лему 4, яка є

[46] A.Mekey. On subalgebras of finite codimension // Stud. sci. math. hung., 27 (1992). P. 119–123.

виправленою версією леми 13 з роботи [47]: нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем та I правий (лівий) майже нільпотентний ідеал в R. Тоді R містить нільпотентний ідеал T такий, що підалгебра $(I\ +T)/T$ фактор-алгебри R/T є скінченновимірним розширенням ідеалу J/T з властивістю $(J/T)^2 = 0$. Зауважимо, що в лемі 13 із [22] стверджувалося, що ідеал I міститься в деякому двосторонньому майже нільпотентному ідеалі алгебри R, що не завжди виконується.

Наступний результат може бути легко отриманий з використанням елементарних властивостей лінійних відображень векторних просторів над полями довільної характеристики.

Лема 2.4. (див., наприклад, [48]) *Нехай R – асоціативна алгебра над полем K і V – K-підпростір з R скінченної корозмірності в R. Тоді для кожного елемента a* $\in R$ *існує K-підпростір* $V_a\ \subseteq V$ *скінченної ковимірності в V такий що* $aV_a \subseteq$ V, $V_a a \subseteq$ V.

Вкажемо також деякі стандартні твердження про нільпотентні ідеали та підалгебри асоціативних алгебр.

Лема 2.5. (див., наприклад, [49] або [22]). *Нехай A – асоціативна алгебра та I – ідеал алгебри A. Якщо J є ідеалом підалгебри I, то мають місце твердження:*

(1) якщо підалгебра J нільпотентна, то J лежить в деякому нільпотентному ідеалі J_I *алгебри A і* $J_I\ \subseteq I$*;*

(2) якщо підалгебра J скінченновимірна, то J лежить в ідеалі J_I *алгебри A такому що, що* $J_I\ \subseteq I$ *і* J_I *містить нільпотентний ідеал T алгебри A з властивістю* $dim J_I/T < \infty$.

(3) якщо асоціативна алгебра R має ідеал I, який є розширенням нільпотентної алгебри за допомогою скінченновимірної алгебри і факторалгебра R/I

---

[47] Petravchuk A. On associative algebras which are sums of two almost commutative subalgebras, Publ. Math. Debrecen – 1998. – 53. – P. 191–206.

[48] Bilun S.V. On sums of a nilpotent and ideally finite algebras, Algebra and Discrete Mathematics – 2007. – no.3, .38–45.

[49] V.A.Andrunakievich, Yu.M.Ryabukhin. Radicals of algebras and structure theory/ V.A.Andrunakievich, Yu.M.Ryabukhin // Moscow, Nauka (1979), 495p. (in Russian).

має таку ж властивість, то алгебра R є також розширенням нільпотентної алгебри за допомогою скінченновимірної алгебри.

2.2.3 У наступній лемі наведено коротке (й інше) доведення основного результату роботи [21]. Це твердження часто буде використовуватися в подальшому.

Лема 2.6. *Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем і A – підалгебра із R скінченної корозмірності в R. Тоді в підалгебрі A міститься ідеал I алгебри R, який має скінченну корозмірність в R.*

Доведення. Виберемо яку-небудь систему представників $\{g_1, \ldots, g_n\}$ суміжних класів векторного простору R за підпростором A. Згідно з лемою 2.4, для кожного елемента g_i із цієї системи існує підпростір B_i із підалгебри A такий, що

$$g_i B_i \subseteq \mathrm{A},\ B_i g_i \subseteq \mathrm{A},\ \mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{n}$$

і при цьому dim A/B_i < ∞, i = 1, . . . , n. Позначимо через B перетин всіх цих підпросторів, тобто B = $\cap_{i=1}^{n} B_i$. Тоді B має скінченну корозмірність в A (а тому і в R) та g_iB ⊆ A, Bg_i ⊆ A для всіх i = 1, ... , n. Звідси випливає, що

$$\mathrm{BR} = \mathrm{B}(g_1 + \mathrm{A} + \cdots g_n\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{A},$$

оскільки BA ⊆ A і Bg_i ⊆ A, i = 1, . . . n за відзначеним вище. Аналогічно можна показати, що RB ⊆ A. Позначимо через ⟨B⟩ підалгебру, породжену в A підпростором B. Тоді, як неважко переконатися, виконуються співвідношення

$$\mathrm{R}\langle \mathrm{B}\rangle \subseteq \mathrm{A},\ \langle \mathrm{B}\rangle \mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}$$

Замінимо тепер в проведених міркуваннях підалгебру A на підалгебру ⟨B⟩, яка очевидно, має скінченну корозмірність в алгебрі R. Тоді отримаємо підпростір C ⊆ ⟨B⟩ такий, що C має скінченну корозмірність в B (а тому і в алгебрі R). Як і раніше, розглянемо підалгебру ⟨C⟩, породжену підпростором C, яку для зручності позначимо через D. Далі, розглянемо підпростір векторного простору R вигляду I = D + RD + DR + RDR. Це, очевидно, двостороній ідеал алгебри R та, оскільки D ⊆ I, то ідеал I має скінченну корозмірність в алгебрі R. При цьому, очевидно,

$$\mathrm{RD} \subseteq \mathrm{A},\ \mathrm{DR} \subseteq \mathrm{A}$$

згідно з побудовою підалгебри D. Крім того,

$$\mathrm{RDR} \subseteq \langle \mathrm{B} \rangle \mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}$$

і тому I ⊆ A. Таким чином, ми побудували ідеал скінченної корозмірності із R, який лежить в підалгебрі A. Лему доведено.

Лема 2.7. *Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем K, I – правий (лівий) майже нільпотентний ідеал алгебри R. Тоді R містить нільпотентний ідеал T такий, що підалгебра I +T /T фактор-алгебри R/T є скінченновимірним розширенням деякого ідеалу S/T (алгебри I + T /T) з властивістю* $(S/T)^2 = 0$.

Доведення. Нехай J – який-небудь нільпотентний ідеал правого ідеалу I скінченної ковимірності в I (такий ідеал існує, оскільки I – майже нільпотентна алгебра). Тоді JR ⊆ I та, очевидно,

$$\dim(\mathrm{J} + \mathrm{JR})/\mathrm{J} < \infty,$$

тобто правий ідеал JR скінченновимірний над J. Тоді існує K-підпростір

$$J_0 \subseteq \mathrm{J}, \dim \mathrm{J}/J_0 < \infty$$

такий що $J_0 \cdot \mathrm{JR} \subseteq \mathrm{J}$. Дійсно, виберемо повну множину $\{g_1 1, \ldots, g_k\}$ представників суміжних класів з фактор-простору J + JR/J. За лемою 1 існує K-підпростір $J_i \subseteq \mathrm{J}$ такий, що

$$J_i \cdot g_i \subseteq \mathrm{J}, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

і при цьому виконуються умови $\dim \mathrm{J}/J_i < \infty$. Тоді, очевидно, для K-підпростору $J_0 = \cap_{i=1}^{n} J_i$ виконуються співвідношення $J_0 g_i \subseteq \mathrm{J}$, i = 1, . . . , n і $\dim \mathrm{J}/J_0 < \infty$. Оскільки $J_0\mathrm{J} \subseteq \mathrm{J}$, то ми маємо $J_0\mathrm{JR} \subseteq \mathrm{J}$. Але тоді $(J_0\mathrm{J})\mathrm{R} \subseteq \mathrm{J}$, а це означає, що

$$J_0\mathrm{J} + J_0\mathrm{JR} \subseteq \mathrm{J}$$

і тому сума

$$J_0\mathrm{J} + J_0\mathrm{JR}$$

є правим ідеалом алгебри R, який міститься в J. Але тоді $J_0\mathrm{J} + J_0\mathrm{JR}$ – нільпотентний правий ідеал алгебри R і тому, згідно з лемою 2.5, $J_0\mathrm{J} + J_0\mathrm{JR}$ лежить в деякому двосторонньому нільпотентному ідеалі T алгебри R. У фактор-алгебрі $\bar{R}$ = R/T виконується рівність $\bar{J}_0\bar{J} = 0$, де

$$\bar{J}_0 0 = J_0 + \mathrm{T}/\mathrm{T}, \bar{J} = \mathrm{J} + \mathrm{T}/\mathrm{T}.$$

З цього співвідношення випливає, що $(\bar{J}_0)^2 = 0$ (а тому $\bar{J}_0$ – підалгебра із $\bar{R}$) і $\bar{J}_0$

має скінченну корозмірність в просторі $\bar{I}$ = I +T /T. З огляду на лему 2.6, $\bar{J}_0$ містить ідеал $\bar{S}$ = S/T підалгебри $\bar{I}$ такий, що $(\bar{S})^2$ = 0 і $\bar{S}$ має скінченну корозмірность в $\bar{I}$. Лему доведено.

Наслідок 2.1. *Якщо R – напівпервинна асоціативна алгебра над полем і I – майже нільпотентний лівий (правий) ідеал, то I є скінченновимірним розширенням деякого ідеалу J (алгебри I) такого, що J^2 = 0.*

Лема 2.8. *Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем K і нехай A – підалгебра із R така, що Ann_R^r (A) (або Ann_R^l (A)) має скінченну корозмірність в R. Тоді підалгебра A міститься в деякому двосторонньому майже нільпотентному ідеалі T алгебри R.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли правий анулятор $\mathrm{An}n_R^r$ (A) має скінченну корозмірність в R і позначимо для зручності S = $\mathrm{An}n_R^r$ (A). Виберемо повну систему представників $\{g_1, . . . , g_k\}$ суміжних класів R/S. Тоді

$$A + AR = A + A\left(\sum_{i=1}^{k} (g_i + S)\right) = A + \sum_{i=1}^{k} Ag_i$$

та A + AR є правим ідеалом алгебри R, який містить підалгебру A. Згідно з лемою 2.5, для кожного елемента g_i , i = 1, . . . , k існує K-підпростір $S_i \subseteq$ S скінченної корозмірності в S такий що $g_i S_i \subseteq$ S. Тоді перетин T = $\cap_{i=1}^{k} S_i$ має скінченну корозмірність в S (а тому і в R) і при цьому, очевидно, g_iT ⊆ S, i = 1, . . . , k. Але тоді Ag_iT ⊆ AS = 0, а тому (A + AR)T = 0. Замінюючи A на A + AR в умові леми, можна одразу вважати, що підалгебра A із умови леми є правим ідеалом алгебри R. Звідси зразу випливає, що S = $\mathrm{An}n_R^r$ (A) є двостороннім ідеалом алгебри R. Крім того, перетин S_0 = A ∩ S є, очевидно, правим ідеалом алгебри R і S_0^2 = 0, dim A/S_0 < ∞. Двосторонній ідеал U = S_0 + RS_0 алгебри R нільпотентний (оскільки S_0 –правий нільпотентний ідеал із R) і, як неважко переконатися, dim A + U/U < ∞. В фактор-алгебрі $\bar{R}$ = R/U скінченновимірна підалгебра $\bar{A}$ = A + U/U має правий анулятор скінченної корозмірності. Тому за лемою 12 із роботи [22], підалгебра $\bar{A}$ міститься в деякому майже нільпотентному ідеалі $\bar{J}$ алгебри $\bar{R}$. Тому повний прообраз J ідеала $\bar{J}$ є майже нільпотентним ідеалом алгебри R, який містить підалгебру A. Лему доведено.

Наступні дві технічні леми містяться в роботі [22].

Лема 2.9. (див., [22], Lemma 11). *Якщо I – односторонній скінченновимірний ідеал асоціативної алгебри A, то A містить деякий нільпотентний ідеал J такий що (I + J)/J лежить в деякому скінченновимірному (двосторонньому) ідеалі фактор-алгебри A/J.*

Лема 2.10. (див., [22], Lemma 12). *Нехай A асоціативна алгебра над довільним полем F і a – елемент із A такий, що*

$$dimA/Ann_A^r(a) < \infty, (dimA/Ann_A^l(a) < \infty).$$

Тоді елемент a належить деякому скінченновимірному правому (відповідно лівому) ідеалу алгебри A.

Для доведення основного результату наведемо допоміжне твердження, доведене в [2.7].

Лема 2.11. *Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем, яка розкладається в суму R = A + B своїх правих (лівих) майже нільпотентних ідеалів A і B. Тоді алгебра R майже нільпотентна.*

Доведення. За лемою 2.7, в алгебрі R існують нільпотентні ідеали S і T такі, що в факторалгебрі R/S правий ідеал A + S/S містить ідеал I/S з $(I/S)^2$ =0 скінченної корозмірності в A+S/S і аналогічно в фактор-алгебрі R/T правий ідеал B+T /T містить ідеал J/T з $(J/T)^2$ = 0 скінченної корозмірності в B + T/T. Переходячи (якщо потрібно) до фактор-алгебри R/N, де N = I + J, можна зразу вважати, що праві ідеали A і B в умові леми містять ідеали I (відповідно, J) скінченної корозмірності в A (відповідно, в B) такі, що $I^2 = J^2 = 0$.

Розглянемо спочатку випадок, коли K-підпростір IJ скінченновимірний. Тоді для довільного елемента $i_0 \in$ I анулятор Ann_R^r (i_0) має скінченну корозмірність в R. За лемою 2.10, елемент i_0 належить деякому скінченновимірному правому ідеалу алгебри R. Але тоді i_0J міститься в цьому скінченновимірному ідеалі. Оскільки dim IJ < ∞, то звідси випливає, що IJ міститься в деякому скінченновимірному ідеалі M алгебри R. За лемою 2.8, добуток IJ лежить в деякому майже нільпотентному ідеалі U алгебри R. В фактор-алгебрі $\bar{R}$ = R/U праві ідеали A + U/ і B + U/U містять ідеали $\bar{I}$ = I + U/U і $\bar{J}$ = J + U/U скінченної корозмірності в A + U/ (відповідно, B + U/U) такі, що $\overline{I}\overline{J}$ = 0. Але тоді в фактор-алгебрі $\bar{R}$ = R/U правий анулятор $Ann_{(\bar{R})}$ ($\bar{I}$) має скінченну корозмірність (оскільки містить суму $\bar{I}$ + $\bar{J}$) і тому за лемою 2.8 маємо, що $\bar{I}$ міститься в деякому майже нільпотентному ідеалі алгебри R. Аналогічно можна показати, що $\bar{J}$ лежить в деякому майже нільпотентному ідеалі алгебри R. Використовуючи лему 2.5, можна показати, що тоді фактор-алгебра $\bar{R}$ = R/U містить майже нільпотентний ідеал скінченної корозмірності. Але тоді, з огляду на лему 2.6, алгебра $\bar{R}$ = R/U майже нільпотентна. Звідси випливає, що і алгебра R майже нільпотентна.

Нехай тепер добуток IJ нескінченновимірний. Оскільки IJ ⊆ A, то перетин IJ ∩ I має скінченну корозмірність в IJ. Оскільки, як неважко переконатися, (IJ ∩ I)(I + J) = 0, то IJ ∩ I має правий анулятор в алгебрі R скінченної корозмірності в R. Тоді, за лемою 2.8, перетин IJ ∩ I міститься в деякому майже нільпотентному ідеалі S алгебри R. У фактор-алгебрі $\bar{R}$ = R/S добуток $\overline{I}\overline{J}$ має вже скінченну розмірність над полем K, де $\bar{I}$ = I +S/S, $\bar{J}$ = J +S/S. За доведеним вище, фактор-алгебра R/S майже нільпотентна. Але тоді й алгебра R майже нільпотентна за лемою 2.5. Лему доведено.

Теорема 2.7. *Нехай R – асоціативна алгебра над довільним полем, A і B – її нільпотентні підалгебри. Якщо dim R/(A + B) < ∞, то алгебра R майже нільпотентна*.

Доведення. Якщо хоча б одна з підалгебр A або B скінченновимірна, то, використовуючи лему 2.6, легко показати, що і алгебра R майже нільпотентна. Справді, нехай, наприклад, dim A < ∞. Тоді підалгебра B має скінченну ковимірність в алгебрі R і за лемою 2.6 підалгебра B містить нільпотентний ідеал J алгебри R з dim R/J < ∞. Це означає, що R – майже нільпотентна алгебра.

Далі будемо вважати, що підалгебри A і B нескінченновимірні. Доведемо твердження теореми індукцією за сумою n(A) + n(B) де n(A) і n(B) – індекси нільпотентності нільпотентних підалгебр A і B відповідно. Нехай твердження виконується для будь-якої алгебри R з нільпотентними підалгебрами A і B такими, що

$$\dim R/(A + B) < \infty,\ n(A) + n(B) < k.$$

Доведемо, що для алгебр з n(A) + n(B) = k твердження теореми також справедливе. Покладемо

$$A_1 = \{x \in R \mid A^{n(A)}x \subset A^{n(A)}\}.$$

Неважко переконатися, що A_1 – підалгебра алгебри R, яка містить підалгебру A (оскільки $A^{n(A)}A = 0$.) Оскільки $A^{n(A)}$ є правим нільпотентним ідеалом алгебри A_1, то підалгебра $A^{n(A)}$ міститься в деякому двосторонньому нільпотентному ідеалі I підалгебри A_1. За умовою теореми виконується нерівність dim R/(A+ B) < ∞ і тому сума

$$A + (A_1 \cap B) = A + B_0,$$

де $B_0 = A_1 \cap B$, має скінченну корозмірність в A_1. Після переходу до фактор-алгебри $\overline{A_1}1 = A_1/I$ ми отримаємо, що $\bar{A} = A + I/I$ і $\overline{B_0} = (B \cap A_1) + I/I$ нільпотентні та задовольняють умови

$$\dim \overline{A_1}/(\bar{A} + \overline{B_0}) < \infty,$$

$$n(\bar{A}) + n(\overline{B_0}) < n(A) + n(B).$$

Тут ми скористалися тим, що фактор-алгебра $\bar{A} = A + I/I$ має менший індекс нільпотентності ніж підалгебра A. За індуктивним припущенням, алгебра $\overline{A_1} = A_1/I$ майже нільпотентна. Оскільки $A + AR \subseteq A_1$, то правий ідеал алгебри A + AR алгебри R майже нільпотентний. Аналогічно можна показати, що B + BR – правий майже нільпотентний ідеал алгебри R. Сума A + AR + B + BR цих двох правих ідеалів є правим ідеалом алгебри R і за лемою 2.11 ця сума є майже нільпотентним ідеалом із алгебри R. Легко бачити, що виконується нерівність

$$\dim R/(A + AR + B + BR) < \infty$$

і тому за лемою 2.5 алгебра R майже нільпотентна. Теорему доведено.

2.3. Будова групи трикутних автоморфізмів кільця многочленів від двох змінних над заданим полем

У підрозділі наведено теоретичні результати, які описують групові властивості та теоретико-групову будову груп трикутних та унітрикутних автоморфізмів кілець многочленів від двох змінних над полями. Групи трикутних автоморфізмів досліджено для полів нульової характеристики, а групи унітрикутних автоморфізмів – для полів як нульової характеристики, так і характеристики $p > 0$, зокрема, скінченних полів.

Кожен ендоморфізм кільця многочленів $K[x_1,\dots,x_n]$ над полем K від n невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, де K – деяке фіксоване поле, однозначно задається відповідністю $F : x_i \to f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1 \le i \le n)$, де $f_1, f_2, \dots, f_n$ – деякі многочлени із $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ та діє на довільний многочлен $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \in$ $\in K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ таким чином:

$$Fg(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)).$$

Для того, щоб даний ендоморфізм був автоморфізмом необхідно й достатньо, щоб існувало оберенене відображення до відображення F, яке задається також набором поліномів.

Ендоморфізми і автоморфізми кільця многочленів $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ можна трактувати також як перетворення n–вимірного афінного простору над полем K

$$A_n(K) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K, 1 \le i \le n\},$$

які є бірегулярними, тобто поліноміально оборотними. Всі бірегулярні перетворення простору $A_n(K)$ утворюють групу, яка називається афінною групою Кремони. Ця група канонічним чином ізоморфна групі $Aut\, K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ автоморфізмів кільця $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$, а її елементи в однозначний спосіб зображаються набором многочленів

$$F = \langle f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle.$$

Перше питання, яке природно виникає: коли ендоморфізм кільця $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$ буде автоморфізмом? Необхідною умовою є виконання умови Якобіана – якщо перетворення F є поліноміально оборотнім, то для його якобіана $J(F)$ виконується вимога $det\, J(F) = const \ne 0.$ Чи є ця умова достатньою для того щоб F було автоморфізмом досі не відомо. Припущення, що це так, складає зміст однієї з найбільш відомих в сучасній математиці гіпотез – гіпотези Якобіана.

Найприроднішими прикладами бірегулярних перетворень даної розмірності n є афінні перетворення, тобто перетворення, що задаються наборами $(f_1, f_2,\ldots, f_n)$ многочленів першого степеня: $f_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j + c_i$, де $\alpha_{ij}, c_i \in K$, причому не всі $\alpha_{ij} = 0 \quad (1 \le i, j \le n)$. Такі перетворення утворюють групу, яку називають *афінною групою*.

Нелінійні бірегулярні перетворення з'являються вже в розмірності 2 (в розмірності $n = 1$ всі афінні перетворення Кремона є лінійними). Таким є, наприклад, перетворення, що задається набором многочленів $F = < x_1, x_2 + x_1^2 >$.

Нагадаємо, що перетворення афінного простору виду

$$F_i = \langle x_1,\ldots,x_{i-1}, x_i + a_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n), x_{i+1},\ldots,x_n\rangle$$

називаються елементарними перетвореннями, а перетворення вигляду

$$\langle f_1, f_2,\ldots, f_n\rangle, \quad \text{де} \quad f_i = \alpha_i x_i + g_i(x_1, x_2,\ldots, x_{i-1})$$

(зокрема, $g_1 = const$) називаються трикутними перетвореннями цього простору.

Всі трикутні автоморфізми кільця $K[x_1, x_2,\ldots, x_n]$ утворюють підгрупу, яка називається групою трикутних автоморфізмів або групою Жонк'єра вимірності n над полем K і позначається $J_n(K)$.

Перетворення афінного простору виду

$$F = \langle x_1 + h_1, x_2 + h_2(x_1),\ldots, x_n + h_n(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1})\rangle,$$

де $h_1 \in K, \quad h_{i+1}(x_1, x_2,\ldots, x_i) \in K[x_1, x_2,\ldots, x_i]$ при $i = 1,2,\ldots,n-1$ називається унітрикутним.

Як згадувалось раніше, автоморфізм $F \in Aut\, K[x_1, x_2,\ldots, x_n]$ називається ручним, якщо він розкладається на добуток певної кількості елементарних перетворень і афінних перетворень. Автоморфізм, який не є ручним, називається диким. У вимірності $n = 2$ відомо, що кожен автоморфізм із групи $G = Aut K[x, y]$ є ручним, тобто G породжується своїми підгрупами афінних автоморфізмів і автоморфізмів Жонк'єра. Питання про те, чи існують дикі автоморфізми у вищих розмірностях, залишалось відкритим до останнього часу, доки І. Шестаков та У. Умірбаєв не довели гіпотезу Нагати, яка стверджувала, що автоморфізм кільця $K[x_1, x_2, x_3]$, заданий набором многочленів

$$< x_1 - 2x_2(x_2^2 + x_3x_1) - x_3(x_2^2 + x_3x_1)^2, x_2 + x_3(x_2^2 + x_3x_1), x_3 >$$

не є ручним.

Як встановлено в роботі[50], природне продовження автоморфізму Нагати до автоморфізму афінного простору більшої розмірності призводить до ручного автоморфізму. Автоморфізми з такою властивістю називають стабільно ручними. Питання про те, чи всі бірегулярні автоморфізми є стабільно ручними поки що залишається відкритим і є одним із складних питань в теорії біраціональних перетворень.

Нагадаємо, що в довільній групі G елемент $(g,h) = g^{-1}h^{-1}gh$ називається комутатором елементів $g,h \in G$, а підгрупа G', породжена всіма комутаторами, називається комутантом групи G або її (першою) похідною. Шириною вербальної підгрупи $V(G)$ відносно набору слів V називається таке найменше число k, що кожен елемент із $V(G)$ розкладається на добуток не більше ніж k значень слів із V в групі G; якщо такого числа k не існує, то кажуть, що ширина вербальної підгрупи $V(G)$ відносно набору слів V дорівнює ∞. Комутаторною шириною групи G називається ширина вербальної підгрупи G' відносно слова (x, y).

Охарактеризовано комутант $UJ_2(K)'$ групи $UJ_2(K)$, встановлено, що він має комутаторну ширину 1. При доведенні цього факту наводяться різні способи знаходження елементів $u,v \in UJ_2(K)$, які задовольняють комутаторну умову $(u,v) = w,$ де $w \in UJ_2(K)$ – наперед задане перетворення із $UJ_2'(K)$. Окремо розглядається випадок, коли поле K - це поле дійсних чисел $\mathbb{R}$.

[50]Cohen D.E. On the laws of metabelian variety/ D.E. Cohen // J.Algebra. – 1967.– №5. – P 267-273.

Нижній центральний ряд $\gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \gamma_3(G)\ldots$ довільної групи G може бути визначений рекурентно рівностями $\gamma_1(G)=G, \gamma_i(G)=\langle (u,v) \mid u\in\gamma_{i-1}(G), v\in G\rangle.$ Доведено, що нижній центральний ряд групи $UJ_2(K)$ стабілізується на комутанті.

Нагадаємо, що верхній центральний ряд $Z_0(G)\subseteq Z_1(G)\subseteq Z_2(G)\subseteq\ldots$ даної групи G визначається індуктивно таким чином: $Z_0(G)=\{1\}, Z_1(G)=Z(G)$, а при $i>1$ $Z_i(G)$ складається з найможливіших елементів $u\in G$ таких, що для довільного $g\in G$ комутатор (u,g) міститься в $Z_{i-1}(G)$.

Теорема 2.8. *n-тий член верхнього центрального ряду $Z_n(UJ_2(K))$ групи $UJ_2(K)$, де K – поле характеристики нуль, збігається з підгрупою*

$$H_{n-1}=\{[0,f(x)] \mid ст. f(x)\leqslant n-1\},$$

де $Z_0=H_{-1}=E$, а його ω-тий член – з підгрупою

$$H=\{[0,f(x)]\},\ f(x)\in K[x].$$

Група $UJ_2(K)$ має верхній центральний ряд довжини $\omega+1$.

Встановлено, що фактори сусідніх членів верхнього центрального ряду ізоморфні між собою та ізоморфні адитивній групі поля K. Описуються орбіти елементів та охарактеризовано класи спряженості групи $UJ_2(K)$. Показано, що будь-яка орбіта довільного ненульового елемента $\alpha\in K$, при дії адитивної групи поля K на кільці многочленів $K[x]$ зсувами аргументу:

$$f(x)\mapsto f(x+\alpha),\ f(x)\in K[x], \alpha\in K,$$

на множині многочленів ненульового степеня є нескінченною.

Якщо множину орбіт адитивної групи K при зазначеній дії на множині многочленів ненульового степеня над K позначити символом Ω, то класи спряженості групи $UJ_2(K)$ в термінах орбіт із Ω описуються таким чином.

Теорема 2.9. *Нехай $u=[\alpha,g(x)]$ - довільний елемент із $UJ_2(K)$. Клас спряженості $U=\langle u\rangle$ цього елемента в групі $UJ_2(K)$ має вигляд:*

$(i)\{[\alpha,h(x)] \mid h(x)\in K[x]\}$, при $\alpha\neq 0$;

$(ii)\{[0,h(x)] \mid h(x)\in\theta\}, \theta\in\Omega$, при $\alpha=0, ст. g(x)\geq 1$;

$(iii)\{[0,c]\}$, при $\alpha = 0, g(x) \equiv c$.

Нехай G – нільпотентна група, n – клас нільпотентності G. Кажуть, що верхній центральний ряд групи G збігається з її нижнім центральним рядом, якщо мають місце рівності $\gamma_i(G) = Z_{n-i}(G)(i = 1,2,\ldots,n)$. Символом $\hat{K}$ позначимо підгрупу перетворень вигляду $[\beta,0], \beta \in K$.

Доведено, що підгрупа $\overline{H_n} = \hat{K} \rightthreetimes H_n$ при фіксованому n 1 є нільпотентною класу n. Верхній центральний ряд цієї групи збігається з її нижнім центральним рядом. При цьому об'єднання всіх підгруп $\overline{H_n}$ співпадає з групою унітрикутних перетворень $UJ_2(K)$.

Нагадаємо, що група G називається локально нільпотентною, якщо кожна її скінченно породжена підгрупа є нільпотентною. Кожна нільпотентна група є локально нільпотентною, але клас локально нільпотентних груп значно ширший від класу нільпотентних груп. З того, що нижній центральний ряд групи трикутних автоморфізмів $UJ_2(K)$ стабілізується на комутанті, випливає, що сама ця група не є нільпотентною. Доведено таклож, що для довільного поля K характеристики нуль група $UJ_2(K)$ є локально нільпотентною (ненільпотентною) групою.

Кожна група, в якій виконується нормалізаторна умова є локально нільпотентною, але не навпаки: клас груп з нормалізаторною умовою є строгим підкласом в класі локально нільпотентних груп. Справедливою є теорема

Теорема 2.10. *Для довільного поля K характеристики нуль в групі $UJ_2(K)$ виконується нормалізаторна умова, тобто кожна її підгрупа відмінна від свого нормалізатора.*

Розглядається питання про повноту групи $UJ_2(K)$ та досліджуються її вербальні підгрупи. Встановлено, що група $UJ_2(K)$ для довільного поля K характеристики 0 є повною, тобто в ній можна добувати корінь будь-якого степеня з довільних елементів. Охарактеризовано ґратку вербальних підгруп групи $UJ_2(K)$ над довільним полем K характеристики нуль: вона є ланцюгом довжини 2 (рис.2.1), єдиною власною нетривіальною вербальною підгрупою цієї групи є комутант $UJ_2(K)'$.

Нагадаємо, що група G називається вербально еліптичною, якщо кожна її вербальна підгрупа має скінченну ширину відносно довільного набору слів $V \subset F$. Групи, що містять вербальні підгрупи нескінченної ширини називаються вербально гіперболічними.

Теорема 2.11. *Для довільного поля* K *характеристики 0 група* $UJ_2(K)$ *є вербально еліптичною.*

Як наслідки з теореми 2.11 випливають такі твердження:

1) Енгелевий ряд групи $UJ_2(K)$ *стабілізується на комутанті, тобто* $e_2(UJ_2(K)) = e_3(UJ_2(K)) = \ldots = UJ_2(K)' = H$.

2) Ширина комутанта відносно довільного простого комутатора $\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *дорівнює 1 для довільного* k *і довільного простого комутатора від* k *змінних.*

3) Ширина комутанта відносно енгелевого слова $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1})$ *дорівнює 1 при* $k1$.

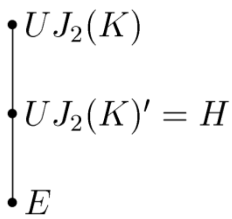

Рис. 2.1. *Ґратка вербальних підгруп* $UJ_2(K)$ *над полем* K *характеристики нуль*

Розглянуто особливості різницевого числення в кільці многочленів над полем характеристики p та охарактеризовано підгрупу p-тих степенів групи $UJ_2(K)$. Зокрема, справедливе такі твердження.

Теорема 2.12. *Нехай* K *– довільне поле характеристики* p. *Група* $UJ_2(K)$ *має експоненту* p^2, *а її підгрупа* p*-тих степенів збігається з центром і складається з перетворень вигляду* $[0,c]$, $c \in K$. *Ширина підгрупи* p*-тих степенів дорівнює 1.*

Далі, розглянуто нормальний дільник Q p-многочленних перетворень.

Для цього нагадується, що многочлен $f(x)\in K[x]$, $\operatorname{char}K=p$, називається p-многочленом, якщо $f(x)\in K[x^p]$. Кожен p-многочлен має вигляд

$$f(x)=a_1x^{p^{k_1}}+a_2x^{p^{k_2}}+\ldots+a_sx^{p^{k_s}}+a_{s+1},$$

де $a_i\in K$, $1\le i\le s+1$, $k_1>k_2>\ldots>k_s\ge 1$.

Многочлен $f(x)$ над полем K характеристики p називатимемо p'-многочленом, якщо він не містить одночленів вигляду ax^{p^k}, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Множину p'-многочленів із $K[x]$ позначимо $K_0[x]$.

Встановлено, що взаємний комутант підгрупи Q перетворень вигляду $[0,b(x)]$, $b(x)\in K[x^p]$ з усією групою $UJ_2(K)$ збігається з її центром, охарактеризовано фактор-групу групи $UJ_2(K)$ за нормальним дільником Q:

Теорема 2.13. *Нехай K – довільне поле характеристики p.*

1) Взаємний комутант $[Q,UJ_2(K)]$ збігається з центром $Z(UJ_2(K))$ групи $UJ_2(K)$.

2) Фактор-група $UJ_2(K)/Q$ ізоморфна групі G.

Тут символом G позначено групу перетворень вигляду $[a,b(x)]$, $a\in K$, $b(x)\in K_0[x]$.

Досліджується енгелева довжини групи унітрикутних автоморфізмів кільця многочленів над довільним полем K характеристики p. Встановлено, що для поля K характеристики p група $UJ_2(K)$ є енгелевою довжини $\leqslant p+1$, тобто в ній виконується тотожність $(x,_{p+1}y)=e$. Наведено приклади підрахунку енгелевої довжини для $p=2$ та $p=3$. У першому випадку дістаємо, що дана оцінка енгелевої довжини не є точною, а в другому – що енгелева довжина рівна $p+1$. Отримано такі результати.

Теорема 2.14. *Для довільних p і m група $UJ_2(F_q), q=p^m$ є нільпотентною.*

Теорема 2.15. *Для довільних p і m клас нільпотентності групи $UJ_2(F_q)$ задовольняє нерівність* $c(UJ_2(F_q))\geqslant m(p-1)+1.$

З останньої нерівності випливає, що із зростанням числа m клас нільпотентності груп $UJ_2(F_q), q = p^m$, строго зростає. Встановлено, що для довільного нескінченного поля K характеристики p група $UJ_2(K)$ породжує груповий многовид – добуток двох групових многовидів абелевих груп експоненти p.

Теорема 2.16. *Нормальний ряд* $J_2(K) \rhd UJ_2(K) \rhd H_2(K) \rhd E$, *де* E *– тривіальна підгрупа в* $J_2(K)$, *збігається з рядом комутантів групи* $J_2(K)$.

Це означає, що у випадку, коли K – поле характеристики нуль, група $J_2(K)$ є розв'язною довжини 3.

Також досліджено вербальні підгрупи групи трикутних автоморфізмів кільця многочленів $K[x, y]$ над полями нульової характеристики. Встановлено, що кожна вербальна підгрупа групи $J_2(K)$ над алгебраїчно замкненим полем характеристики 0 збігається з деяким членом ряду комутантів цієї групи. Як наслідок з даного факту, отримано, що ґратка вербальних підгруп групи $J_2(K)$ над алгебраїчно замкненим полем K характеристики 0 має вигляд рис. 2.2.

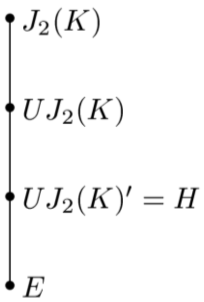

Рис. 2.2. *Ґратка вербальних підгруп групи* $J_2(K)$ *над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль*

Якщо поле K не є алгебраїчно замкненим полем, то дане твердження для нього не має місця.

Нехай $(\Gamma_1, \leq)$ і $(\Gamma_2, \leq)$ – дві впорядковані множини, які є ґратками, тобто для довільних двох елементів $x, y \in \Gamma_i, i = 1,2$ в Γ_i існує їх точна нижня і точна верхня грань. Охарактеризовано ґратку вербальних підгруп групи $J_2(K)$ над полем характеристики 0, яке не є алгебраїчно замкненим, в термінах операції приєднання ґраток. Виявляється, що вона має вигляд $\Gamma_1 \circ \Gamma_2$ (приєднання ґратки Γ_1 до ґратки Γ_2), де Γ_1 – ґратка вербальних підгруп мультиплікативної групи поля K, а Γ_2 – ланцюг довжини 3.

Ґратка вербальних підгруп групи $J_2(\mathbb{R})$, де $\mathbb{R}$ – поле дійсних чисел має вигляд рис. 2.3.

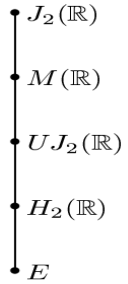

Рис. 2.3. *Ґратка вербальних підгруп групи* $J_2(\mathbb{R})$

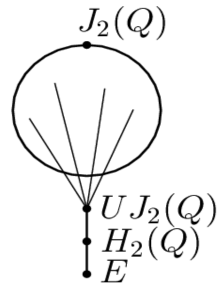

Рис. 2.4 *Ґратка вербальних підгруп групи* $UJ_2(\mathbb{Q})$

Ґратка вербальних підгруп групи $J_2(\mathbb{Q})$, де поле $\mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел має вигляд рис. 2.4.

Встановлено, що два перетворення із групи $AutK[x,y]$, матриці Якобі яких в деякій точці (x_0, y_0) визначають пару матриць, що породжують вільну напівгрупу, також породжують вільну піднапівгрупу в групі $AutK[x,y]$.

Оскільки група $AutK[x,y]$ містить, за теоремою Санова (див., наприклад, [51]) вільні групи, то вона тим більше містить різноманітні вільні напівгрупи. Група трикутних автоморфізмів $J_2(x,y)$ є розв'язною, тобто вільних груп містити не може. Але, як виявляється, умови твердження з попереднього абзацу можуть виконуватися і для трикутних автоморфізмів певного вигляду.

Побудовано нескінченні родини вільних піднапівгруп в групі $AutK[x,y]$, в групі трикутних перетворень із $AutK[x,y]$ та в її підгрупі лінійних трикутних автоморфізмів кільця $K[x,y]$.

[51] Каргополов М.И. Основы теории групп / М. И. Каргополов, Ю. И. Мерзляков // Издание третье, переработаное и дополненое.— Москва: Наука. – 1982. – 288 с.

Розділ ІІІ. МАТЕМАТИЧНА ОСВІТА І НАУКА У ЧЕРНІВЕЦЬКІЙ ОБЛАСТІ ЗА РАДЯНСЬКОЇ ДОБИ

3.1. Математична освіта і наука на Буковині і Хотинщині напередодні їх входження до складу УРСР

Одним із джерел розбудови національної системи освіти є аналіз історичного досвіду її становлення і розвитку в Україні та її регіонах, що дозволить об'єднати на практиці позитивні досягнення минулого й передові тенденції сучасної освітньо-наукової і педагогічної думки. В окресленому форматі особливої уваги заслуговують дослідження щодо становлення і розвитку освіти і науки, національних наукових шкіл, зокрема математичних, започаткованих на Буковині та Хотинщині, як основи науково-технічного прогресу регіону на всіх історичних етапах. Особливої уваги заслуговує перехідний етап в системі освіти краю, коли від європейської системи освіти румунського періоду населення переходило до здобуття освіти за радянською системою навчання.

Поразка центральних держав у Першій світовій війні дала змогу Румунії приєднати до неї Буковину та Бесарабію[52], в складі якої край перебував упродовж 1918-1940 рр. та 1944-1991 рр.

З приходом румунської влади на Буковину та Північну Бесарабію відбувалася румунізація навчальних закладів: шкільна влада призначала вчителів-румунів до українських навчальних закладів. Все це вливало на здобуття освіти, зокрема й математичної, україномовному населенню краю.

Варто зазначити, що за часів перебування Хотинщини у складі королівської Румунії збільшилися можливості здобуття середньої освіти та відповідно й вищої населенням краю. Наприкінці 30-х років ХХ ст. у Хотинському повіті існувало 11 середніх навчальних закладів, з них: 2 ліцеї, 6 гімназій та три сільськогосподарських школи, вищих навчальних закладів не

[52] Сірополко С. Історія освіти в Україні. К.: Наук. думка, 2001. 912 с.

було. Зокрема, в м. Новоселиці, м. Хотині, комунах Клішківці та Новоселиця було відкрито індустріальні гімназії, комерційні ліцеї, сільськогосподарську та ремісничу школи.

Вищу освіту жителям Буковини і Хотинщини можна було здобути в зрумунізованому Чернівецькому університеті або інших вищих навчальних закладах Румунії та Європи. Румунська влада створила систему обмежень для вступу молоді трудящих у вищі навчальні заклади, головною з яких була висока плата за навчання.

Стосовно математичної освіти, то як і за австрійських часів, у початковій школі румунського періоду вивчали арифметику у такому обсязі, щоб можна було продовжити навчання у старших класах загальноосвітніх навчальних закладів.

На класичному відділенні повної середньої освіти перевагу надавали гуманітарним дисциплінам, а математику (арифметику, елементарну та вищу алгебру, тригонометрію, геометрію, механіку, нарисну геометрію, аналітичну геометрію та космографію) поглиблено вивчали на реальному відділенні. Сучасний відділ був «середнім» між вищезгаданими відділеннями.

Найбільшу кількість годин для вивчення математики виділяли у фахових середніх навчальних закладах. До таких належала і Чернівецька технічно-промислова школа[53], учні якої могли отримати фах на таких відділах: машин, електротехніки, індустріальному та будівельному.

Для того, щоб вступити до цієї школи, необхідно було закінчити чотири класи ліцею, і мати мінімум чотирнадцять років. Ті учні, які закінчили три класи ліцею, могли продовжити навчання на підготовчих курсах, які при ній діяли.

У переліку предметів «Навчальної програми та навчального плану» цієї школи була і математика. На підготовчих курсах школи вивчали арифметику та

[53] Programul şi planul de studiu / Şcoala specială tehnico-industrială in Cernăuţi, strada Isopescu № 3. Autorizată de Ministerul de industrie şi comerţ cu ord. minist. № 67.103/23. Cernăuţi: Societatea tipografică Cernauţi, Str. Iancu Flondor № 13, 1925. 81 p.

алгебру (чотири години на тиждень): чотири арифметичні дії з цілими, дробовими (десятковими та звичайними) числами. Пропорції та відношення.

Правило трійки. Обчислення процентів та доходів. Використання лінійки для вимірювання. Чотири арифметичні дії з додатними та від'ємними числами, алгебраїчними виразами (цілими та дробовими). Рівняння першого степеня з однією або кількома невідомими. Загальні властивості коренів, логарифмів та степенів. Також чотири години на тиждень проводили заняття з планіметрії та стереометрії (основні поняття). Пряма та її розміщення. Прямолінійні фігури. Відношення між сторонами та кутами. Рівність трикутників. Квадрат, коло. Порівняння площ прямолінійних фігур. Теорема Піфагора. Об'єм. Пропорційність відстаней. Подібність трикутників та фігур. Відношення площ подібних фігур. Довжина кола. Розв'язування алгебраїчних задач за допомогою рисунка. Основи стереометрії.

Навчальний план складався з обов'язкових предметів, до яких входили і математичні.

На машинобудівельному відділі, індустріальному та відділі електрики вивчали[54]:

- *I семестр*: алгебра – 4 години на тиждень, стереометрія – 2, тригонометрія – 4, диференціальна геометрія – 4; усього обов'язкових годин на тиждень – двадцять дев'ять;

- *II семестр*: обов'язкові предмети: алгебраїчні та тригонометричні рівняння – 2 години на тиждень, аналітична геометрія – 2, диференціальна геометрія – 2; усього обов'язкових годин на тиждень – двадцять вісім і двадцять дев'ять (залежно від відділу);

- *III семестр*: аналітична геометрія – дві з двадцяти восьми та тридцяти години на тиждень, залежно від відділу за такою програмою:

[54] Programul şi planul de studiu / „Technicum" Şcoala specială tehnico-industrială, Cernauţi, Strada Isopescul № 3, cu dreptul de publicate (Deciziunea minist. N-rul 108640 din 9/12 1925). – Cernăuţi: Tip. Korner & Rozenblatt, Cernăuţi, Str. Alexandru cel Bun 2, 1925. – 39 p.

Алгебра (4 – години на тиждень). Корені, степінь із дробовим показником. Рівняння ІІ степеня з однією або декількома невідомими. Логарифми. Експоненціальні рівняння. Уявні виміри. Арифметичні та геометричні прогресії. Обчислення прибутку та податків. Повторювання та розв’язування вправ.

Стереометрія (3 – години на тиждень). Важливі теореми про прямі площини. Тіла та обчислення їх площі поверхонь і об’ємів. Паралелепіпед, піраміда, призма, циліндр, конус, зрізаний конус та піраміда, сфера та її сегменти.

Тригонометрія (4 – години на тиждень). Тригонометричні функції гострих та тупих кутів. Логарифмічно-тригонометрична таблиця. Розв’язування трикутників та многокутників. Тригонометричні задачі, які використовують у механіці, тригонометрії. Стереометричні та тригонометричні задачі (2 – години на тиждень).

Аналіз та диференціальне числення (3 – години на тиждень). Загальне поняття функції. Алгебраїчні та трансцендентні функції, геометричне зображення деякої функції. Введення у диференціальне числення. Диференціювання алгебраїчних та трансцендентних функцій, максимум та мінімум.

Аналітична геометрія (2 – години на тиждень). Прямокутна система координат. Координати точки. Рівняння та властивості прямих, кола, параболи, еліпса, гіперболи, а також дотичні, нормалі тощо до кола, параболи, еліпса, гіперболи. Полярні координати. Аналітика інших кривих. Деякі регулярні поверхні. Еліпсоїд з трьома осями.

З вищевикладеного випливає, що програма з математики в середніх навчальних закладах була досить насиченою і відповідала тодішньому європейському рівню, осилити яку могли лише добре підготовлені випускники початкової школи.

Тенденції розвитку вищої математичної освіти і науки. Зі входженням Буковини та Північної Бесарабії до складу королівської Румунії пов’язано зміни, обумовлені реорганізацією навчання за системою в латинських країнах. Саме за цим аналогом було організовано навчання у всіх університетах Румунії, зокрема, і в Чернівецькому, внаслідок чого філософський факультет у 1923 р. було поділено на філософсько-філологічний та науково-природничий.

Науково-природничий факультет мав такі відділення[55],[56]:

1) математичні науки;

2) фізичні науки;

3) хімічні науки;

4) природничі науки;

5) географічні науки.

Предмети, що входили до навчального плану (програми) математичного відділення:

1. Вища алгебра та елементи аналізу
2. Аналітична геометрія.
3. Проективна, нарисна та диференціальна геометрія.
4. Диференціальне та інтегральне числення.
5. Диференціальні рівняння.
6. Теорія функцій.

Крім цих предметів, читали й предмети фізичного спрямування: раціональна механіка, астрономія та геодезія тощо, а також і спеціальні курси.

Із входженням Буковини до складу королівської Румунії математики, які працювали в університеті за австрійських часів, виїхали з краю у зв'язку з переходом навчальних закладів на румунську мову викладання. З 1918 р. по 1923 р. в університеті не працювало жодного математика. Навчання в університеті проводили румунською мовою, яка була державною у 1918-1940 роках.

Поступово на науково-природничому факультеті формували кафедри алгебри та теорії функцій, аналітичної та вищої геометрії, диференціального та інтегрального числення зі значним науковим потенціалом.

[55] Anuarul universităţii din Cernăuţi: Anul de studii 1925-1926. – Cernăuţi: Editura universităţii, 1926. – 200 p.

[56] Grigorovitâ M. Învâtâmîntul în Nordul Bucovinei (1875-1944. Bucureşti: Editura didactica şi pedagogica, R.A, 1993. 176 p.

Кафедрою алгебри та теорії функцій у 1923-1938 рр. завідував С. Стоїлов (1887-1961) – румунський математик, доктор математики (1916 р.), професор (1923 р.), член-кореспондент РАН (1936 р.), академік РАН (1945 р.), лауреат державної премії Румунії і член Бельгійського математичного товариства.

У міжвоєнний період в університеті працювали такі математики: Ф. Васілеску, Г. Врinчану, М. Ніколеску, К. Первулеску, Ш. Петреску, Т. Поповічіу, Д. Хулубей та ін. Вагомих результатів у дослідженні проблем диференціальної геометрії досягли Д. Хулубей та Г. Врinчану[57],[58],[59].

Після прийняття «Закону про визнання як юридичної особи Чернівецького університету», обнародуваного королівським декретом від 28 жовтня 1924 р., було затверджено «Загальний регламент Чернівецького університету» та регламенти діяльності факультетів і кафедр. У цих документах визначено порядок їх роботи, проведення щорічних перевідних, державних, докторських екзаменів, вступу до університету, відвідування лекцій, семінарських і практичних занять, програми різних курсів тощо.

Університетські курси читали лише титуловані професори або їх заступники. Доценти та доктори наук могли замінюти професорів, як правило, лише два тижні. На практичних заняттях їм допомагали викладачі, керівники студентських курсових робіт, асистенти й лаборанти.

За два тижні до початку нового навчального року видавали «Програми курсів і занять на семінарах, в інститутах і лабораторіях», де зазначалася тематика теоретичних курсів, практичних занять, семінарів, прізвища професорів, викладачів, асистентів і бібліотекарів, години й місця проведення занять.

Професори за кошти ректорату видавали лекційні курси в університетській друкарні або у видавництвах «Glasul Bucovinei», «Mitropolitul Silvestru» та ін.

[57]Andronie G.**Ş.** Istoria matematicii în România. În 3 v. – V. 2: Din 1918 pînă în 1948. Bucure**şti: Editura ştiin**ţifică, 1966. 472 s.

[58] Andronie G.**Ş.** Istoria matematicii în România. În 3 v. V. 3. Bucure**şti: Editura ştiin**ţifică, 1967. 517 s.

[59] Mayer O. Opera matematica. – Vol. 1: Note şi memorii. 1919-1941 / Mayer O. – Bucureşti: Editura academiei republicii socialiste România, 1974. – 536 s.

Студенти були зобов'язані щотижня відвідувати не менше 10 годин лекцій та практичних занять з обраної спеціальності. В травні усі професори, викладачі та асистенти отримували списки студентів, яких допускали до складання річних іспитів (з 1 по 20 червня). Студенти, яких з різних причин не допускали до сесії, могли складати екзамени восени (з 1 по 20 жовтня або навіть з 1 по 15 грудня). За складання кожного річного іспиту студент мав сплатити 30 лей. Студентів, які впродовж двох навчальних років не складали екзаменів із відповідних предметів, виключали з університету[60].

Проблема підготовки педагогічних кадрів з математики у Чернівецькому університеті була актуальною і за часів перебування Буковини та Північної Бесарабії у складі королівської Румунії.

Для того, щоб отримати диплом з математики, треба було скласти іспити з таких дисциплін:

1. Вищої алгебри та елементів аналізу.
2. Аналітичної геометрії.
3. Проективної, нарисної та диференціальної геометрії.
4. Диференціального та інтегрального числення.
5. Теорії функцій.
6. Механіки.
7. Астрономії та геодезії.
8. Спеціальних курсів.

Математику вивчали і на інших відділеннях – географічному, хімічному, фізичному. Зокрема на фізичному відділенні здавали іспити з:

1. Вищої алгебри та елементів аналізу.
2. Аналітичної та диференціальної геометрії.
3. Диференціального та інтегрального числення.

---

[60] Programul cursurilor şi lucrălilor în seminarii, institute şi laboratoare pe anule şcolare 1936-1937 / Universitatea „Regele Carol II" Cernauţi. – Cernauţi, 1936. – 22 p.

У пропагуванні наукових досягнень важливу функцію виконували наукові бюлетені факультету (Buletinul facultăţii de **ş**tiinţe din Cernăuţi[61]), де друкували праці членів педагогічного колективу, студентів, а також результати досліджень учених, як з Румунії, так із-за кордону. Цей бюлетень видавали з 1927 по 1938 рр.

На завершення зазначимо, що хоча й існує думка, що Чернівецький університет за румунський період перестав бути науковим і культурним центром поліетнічної Буковини, але це не стосувалося негуманітарних кафедр. У той час у складі науково-природничого факультету університету відкривали низку науково-дослідних інститутів, лабораторій та наукових семінарів, діяльність яких була відомою далеко за межами Буковини. На факультеті діяли кафедри зі значним науковим потенціалом: вищої алгебри – завідувач професор С. Стоїлов, всесвітньовідомий математик; диференціальних рівнянь – завідувач професор Г. Врinчану; аналітичної та вищої геометрії – завідувач професор М. Ніколеску.

Про рівень математиків Чернівецького університету того часу свідчить і те, що з дев’яти кафедр, існуючих у 1942 р. в Бухарестському університеті Румунії, чотирма завідували професори, які тривалий час працювали в Чернівецькому університеті, зокрема кафедру геометрії очолював Г. Врінчану, академік Румунської Академії Наук (РАН); диференціальних та інтегральних рівнянь – М. Ніколеску, академік РАН; теорії функцій – С. Стоїлов, академік РАН, лауреат Державної премії Румунії; механіки –Д. Хулубей.

Можна з упевненістю стверджувати, що в Чернівецькому університеті у міжвоєнний період XX ст. працювали відомі тоді математики Румунії зі світовим іменем, які за час роботи в ньому створили і розвинули низку напрямків наукових досліджень і внесли вагомий вклад у розвиток класичної математики. Проте, варто зазначити, що результати своїх досліджень вони друкували переважно французькою або німецькою мовами, що було недоступно

---

[61]Buletinul facultăţii de **ş**tiinţe din Cernăuţi / Apare sub direcţia unui comitet de redacţie compus din E. Badareu, M. Gu**şuleac, J. Prelipcean. Vol. II. Fasc. 1. 1928.** Cernăuţi: Editura Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi, 1928. 487 p.

україномовним студентам, вихідцям з буковинського краю, а тому серед викладачів математичного відділення не було корінних жителів Буковини та Північної Бесарабії – українців.

3.2. Математична освіта і наука на Буковині і Хотинщині у перші роки радянської доби

Перш ніж перейти до розгляду питання щодо математичної освіти і науки на Буковині і Хотинщині у перші роки радянської доби, доцільно розглянути проблему стосовно освіти і науки в цілому у краї зазначеного періоду.

Радянська влада розглядала систему освіти, науки і культури як важливе знаряддя духовного впливу на населення приєднаного краю, особливо на молоде покоління, з метою прищеплення йому комуністичної ідеології, а, отже, – виховання з нього покірних громадян, лояльних до нової влади.

Найбільш дієвим засобом переконання населення у «перевагах» і «демократичності» нової системи, порівняно з попередньою румунізаторською, мало послужити переведення владних структур, закладів освіти і культури на українську мову в місцях компактного проживання українців при залишенні румунської (молдавської) мови як дозволеної для використання в аналогічних закладах з компактним проживанням носіїв цієї мови[62].

Завдяки послідовному здійсненню ленінської національної політики в області вільно залунала українська й інші мови. Рідна мова корінних жителів краю стала знаряддям комуністичного виховання трудящих мас.

Проте недовгою була радість з приводу того, що українська мова отримала права, котрих була позбавлена румунською королівською адміністрацією. Хоча мову переважної більшості населення краю було запроваджено і в державних установах, освіті тощо, водночас було заборонено українську газету «Час», вилучено з бібліотек україномовні твори, визнані «буржуазно-націоналістичними», закрито Український Народний Дім у Чернівцях. Система

[62]Буковина : історичний нарис / [За ред. С.С. Костишина] В.М. Ботушанський (відп. ред.), О.В. Добржанський, Ю.І. Макар, О.М. Масан, Л.П. Михайлина. Чернівці : Зелена Буковина, 1998. 416 с.

освіти, періодичні видання, заклади культури було передано під жорсткий контроль КПРС.

В області було розпочато русифікацію населення, що враховувала окремі інтереси кожної з національних меншин – видавали газети як українською, так і румунською мовами. Край наповнювався радянськими військами, службовцями із зрусифікованої східної частини України та й російських областей. Після репресій проти місцевої інтелігенції в Чернівецьку область було направлено кілька тисяч радянських учителів, лікарів, інженерів тощо[63].

Одним з першочергових завдань було запровадження у новоствореній області загального обов’язкового навчання дітей шкільного віку, ліквідація неписьменності дорослого населення[64].

Використовуючи досвід у справі будівництва радянської школи, партійні й інші організації за активної участі громадян здійснили реорганізацію навчальних закладів. Замість румунських гімназій, училищ і шкіл в області було організовано 538 радянські школи, з них: 371 початкових (4-річні), 142 неповносередніх (7-річні) і 25 середніх (10-річні)[65].

Для молоді, яка не мала раніше можливості отримати середню освіту, в 1940-1941 н. р. було створено 15 вечірніх шкіл робітничої і сільської молоді, де буковинські юнаки й дівчата могли без відриву від виробництва отримати середню освіту. На потреби освіти радянська влада асигнувала в чотири рази більше коштів, ніж королівська Румунія. У 400 школах навчання вели українською мовою, 117 – молдавською (румунською), 11 – російською, 9 – єврейською, 1 – польською, у них навчалося 107677 учнів[66].

---

[63] Буковина: історичний нарис / [За ред. С.С. Костишина] В.М. Ботушанський (відп. ред.), О.В. Добржанський, Ю.І. Макар, О.М. Масан, Л.П. Михайлина. Чернівці: Зелена Буковина, 1998. 416 с.

[64] Про організацію навчання в школах Акермаської і Чернівецької областей Української РСР (Інструкція народного комісаріату освіти УРСР). Київ, 1940. 23 с.

[65] Державний архів Чернівецької області(ДАЧО). – Ф. Р-763: Відділ народної освіти виконавчого комітету Чернівецької обласної ради депутатів трудящих. Оп. 4. Т. 2. Спр. 525: План роботи шкільного сектору на IV четверть 1944/1945 навчального року. 2 арк.

[66] ДАЧО. – Ф. Р-82: Чернівецький державний університет, м. Чернівці, 1944-1958 рр. – Оп. 5. – Т. 1. – Спр. 1: Накази і розпорядження Наркомату освіти УРСР і Управління вищої школи при РНК УРСР щодо навчально-організаційної роботи, червень 1944 р. 27.06.1945 р. – 98 арк.

У школах працювало 3455 вчителів, з них 2446 – вихідці з місцевого населення, у тому числі 299 осіб, які за румунської окупації були безробітними. У зв'язку з нестачею вчительських кадрів, на роботу в школи області було відряджено 1009 вчителів зі східної частини України[67],[68].

Органами народної освіти було організовано підвищення кваліфікації вчителів – вихідців з місцевого населення, які не мали вищої освіти і не знали радянської системи навчання, на яких отримало перепідготовку 1200 осіб.

Для забезпечення роботи шкіл було підготовлено програми і навчальні плани, завезено 126 тис. примірників радянських підручників, при школах створено 187 бібліотек з фондом понад 33 тис. книг[69].

16 вересня 1940 р. 140,9 тисячі дітей шкільного віку заповнили класи радянської школи, що на 47 тисяч було більше, ніж навчалося у школах за румунського періоду.

Важкою спадщиною минулого краю була неписьменність і малописьменність дорослого населення. В результаті проведеного обліку письменних і малописьменних в області було виявлено 104,9 тис. неписьменних і 53,6 тис. малописьменних.

Для ліквідації неписьменності і малописьменності було створено спеціальні комісії в усіх районах області та організовано 380 шкіл і гуртків, спрямовано понад 600 учителів та письменних активістів. Усіх, хто відвідував школи і гуртки для неписьменних, було забезпечено за рахунок держави підручниками, зошитами й іншими навчальними посібниками. Крім шкіл і гуртків ліквідації неписьменності і малописьменності, було створено середні і неповні середні школи для дорослих, вечірні школи робітничої і сільської

---

[67] Партійний архів Чернівецького обкому компартії України (ПАЧОКПУ). – Ф. 1: Чернівецький обком компартії України. Оп. 12. С. 12: Звіт обласного відділу народної освіти про роботу шкіл за перше півріччя 1940/1941 навчального року. 18 арк.

[68] Щербина Д.Н. Развитие народного образования на Буковине. Черновцы, 1961. 283 с.

[69] Буковина: історичний нарис / [За ред. С.С. Костишина] В.М. Ботушанський (відп. ред.), О.В. Добржанський, Ю.І. Макар, О.М. Масан, Л.П. Михайлина. Чернівці: Зелена Буковина, 1998. 416 с.

молоді. Восени 1940 р. ними було охоплено 52,8 тис. осіб, в тому числі 30,9 тис. неписьменних і 21,9 тис. малописьменних[70].

В 15 вечірніх неповносередніх і середніх школах для дорослих навчалося 1236 осіб, а 7,9 тис. – вивчали російську мову в створених гуртках, що сприяло залученню трудящих мас до культури «великого російського народу», вихованню їх на непорушних принципах пролетарського інтернаціоналізму, ленінської ідеології дружби і братерства народів.

Для підготовки кваліфікованих фахівців – будівників соціалізму було поновлено роботу Чернівецького університету, створено Учительський інститут, Інститут удосконалення кваліфікації вчителів, 5 технікумів, 4 спеціалізованих училища, зокрема педагогічні – у Чернівцях та Хотині, які готували вчителів для початкових класів, і 4 сільськогосподарських школи[71] [20, с. 77-97]. Діти робітників, селян та інтелігенції дістали можливість одержати вищу і спеціальну освіти. Так, Постановою Ради Народних Комісарів СРСР від 13 серпня 1940 р. та наказу НКО УРСР від 22 серпня 1940 р. колишній румуномовний університет у Чернівцях було реорганізовано в державний університет з українською мовою викладання у складі шести факультетів: історичного, філологічного (з відділеннями української, російської та західноєвропейських (англійська, німецька, французька) мов і літератур), фізико-математичного з спеціальностями фізика і математика, геолого-географічного з спеціальностями географія і геологія, біологічного з спеціальностями ботаніка і зоологія та хімічного з спеціальностями аналітична, неорганічна та органічна хімія. На перший курс університету було прийнято 420 студентів: на філологічний факультет – 180 (по 60 студентів на кожне відділення), історичний – 60, фізико-математичний – 60 (по 30 на кожну спеціальність), геолого-географічний – 30 на спеціальність географія, біологічний – 30 на спеціальність ботаніка, хімічний – 60 (30 на

---

[70] Буковина : історичний нарис / [За ред. С.С. Костишина] В.М. Ботушанський (відп. ред.), О.В. Добржанський, Ю.І. Макар, О.М. Масан, Л.П. Михайлина. Чернівці : Зелена Буковина, 1998. 416 с.

[71] Ростикус Р.П. Перші заходи Радянської влади по організації вищої освіти в західних областях Радянської України (1939-1941 рр.) // Наукові записки Чернівецького державного університету (шостий випуск аспірантських робіт). Т. XXXV. Серія історичних наук. Вип. 4. 1959. С. 77-97.

спеціальність аналітична і неорганічна хімія, 30 – органічна). Навчання в університеті у 1940/1941 н. р. розпочалося 1 жовтня 1940 р. (Наказ № 13 по Чернівецькому державному університету від 27.08.1940 р.). Крім того було передбачено прийом 200 осіб на заочну форму навчання. Першим ректором Чернівецького державного університету було призначено З.П. Шульгу. У цьому ж році 15 жовтня в Чернівцях відкрито 2-річний учительський інститут у складі трьох факультетів, де навчалося 263 студенти, в основному майбутні вчителі для семирічних шкіл[72].

Оскільки абсолютна більшість викладачів Чернівецького університету виїхала до Румунії, то професорсько-викладацький склад формувався із фахівців, вихідців зі східної частини України та інших республік СРСР, і становив спочатку 59 осіб, зокрема, з Києва прибули член-кореспондент Академії наук УРСР М.М. Боголюбов, доцент П.П. Білик, М.В. Пасічник, Л.В. Гаркуша, З.П. Шульга та ін., з Дніпропетровського університету – доцент В.С. Ващенко, Харківського – доцент М.С. Лимаренко, Одеського – доцент М.Ф. Скавронський та ін., серед них було лише 16 кандидатів наук, доцентів. Постала потреба підготовки висококваліфікованих кадрів через аспірантуру у ВНЗ України.

Тимчасово виконував обов’язки декана фізико-математичного факультету до 1 листопада 1940 р. Ю.М. Мачук, а з 5 листопада 1940 р. – С.В. Трохименко[73].

Першим тимчасово виконуючим обов’язки завідувача кафедри алгебри та аналітичної геометрії з 22 вересня 1940 р. було призначено Ю.О. Кікіца, а математичного аналізу – з 1 жовтня 1940 р. Л.О. Манакіна.

Значну увагу було приділено науковій роботі, зокрема до річниці визволення краю наукові працівники університету підготували збірник про корисні копалини за участю й доктора фізико-математичних наук М.М. Боголюбова.

---

[72] Ростикус Р.П. Перші заходи Радянської влади по організації вищої освіти в західних областях Радянської України (1939-1941 рр.) // Наукові записки Чернівецького державного університету (шостий випуск аспірантських робіт). Т. XXXV. Серія історичних наук. Вип. 4. 1959. С. 77-97.

[73] ДАЧО. – Ф. Р-82: Чернівецький державний університет, м. Чернівці, 1940-1941 рр. – Оп. 1. – Спр. 1: Накази за 1940-1941 рр. – 92 арк.

У вищих навчальних закладах області почали готувати висококваліфіковані кадри різних галузей науки, зокрема вчителів математики – жителів краю, необхідних краю, а в технікумах, спеціальних училищах і школах – фахівців для текстильної, трикотажної, лісової, будівельної промисловості, торгівлі, сільського господарства та інших професій. За один рік в області відбулися значні зміни в усіх напрямках.

3.3. Формування системи математичної освіти у ЗНЗ та науки у ВНЗ Чернівецької області досліджуваного періоду

Великої шкоди було завдано освітнім закладам області в роки її окупації румуно-німецькими загарбниками 1941-1944 рр. У перші повоєнні роки в школах не вистачало підручників, зошитів, різного необхідного навчального обладнання. Для шкіл області першого повоєнного року потрібно було 2,5 тис. вчителів, фактично було 1824.

У 1944-1945 н. р. було відбудовано 454 школи, 15 технікумів, 2 інститути і державний університет[74]. У цьому ж навчальному році було охоплено навчанням 94,5 % дітей шкільного віку, які навчалися у 517 відновлених школах, з яких 23 середні, 142 семирічні та 350 початкові (див. табл. 3.1).

Держава не забезпечувала централізовано школи всім необхідним, тому місцеві органи влади вживали заходи, щоб виділити для дітей продукти харчування, одяг тощо. Багато шкіл працювало у дві зміни.

В області продовжували ліквідацію неписьменності, де на 1 січня 1945 р. налічувалося 250 тис. неписьменних осіб. У 1944/1945 н. р. навчанням було охоплено 88366 особи, а впродовж 1944-1951 рр. ліквідовано неписьменність і малописьменність близько 191 тис. особами, серед яких було понад 122 тис. жіночої статі. Наприкінці 1960 р. ліквідацію неписьменності було в основному завершено[75].

---

[74] ДАЧО. Ф. Р-763 : Відділ народної освіти виконавчого комітету Чернівецької обласної ради депутатів трудящих. Оп. 4. Т. 2. Спр. 525 : План роботи шкільного сектору на IV четверть 1944/1945 навчального року. 2 арк.

[75] Буковина : історичний нарис / [За ред. С.С. Костишина] В.М. Ботушанський (відп. ред.), О.В. Добржанський, Ю.І. Макар, О.М. Масан, Л.П. Михайлина. Чернівці : Зелена Буковина, 1998. 416 с.

Для реалізації загального обов'язкового навчання у всіх населених пунктах краю було проведено облік дітей віком від 6 до 15 років, для кожної школи встановлено її «шкільний мікрорайон». Місцеві Ради депутатів трудящих систематично заслуховували на сесіях питання народної освіти і вживали відповідні заходи щодо залучення дітей до навчання.

Культкомісії місцевих Рад депутатів разом зі шкільними батьківськими комітетами дбали про матеріальну допомогу дітям-сиротам та дітям інвалідів Вітчизняної війни.

Реалізація загального обов'язкового навчання супроводжувалася розвитком шкільної мережі та кількості учнів у ній (див. табл. 3.1). У 1949/1950 н. р. школи області перейшли на кабінетну форму навчання, а з переходом наприкінці 40-х р. ХХ ст. до обов'язкового семирічного навчання в області відбулося зростання кількості середніх шкіл. Для реалізації освітньої програми було проведено облік усіх дітей 6-15 років і на основі нього сплановано сітку шкіл з метою охопити навчанням усіх дітей. Для реалізації освітньої політики у 1949 р. було залучено 4102 учителі (2794 особи жіночої статі), з них 3049 українців, 384 росіяни, 273 євреї та 396 інших національностей. З наявної кількості вчителів вищу освіту мали[76] 500 осіб, незакінчену вищу – 925, середню педагогічну – 1785, середню – 357, незакінчену середню – 400. В 1949/1950 н. р. 62 початкові школи було реорганізовано в семирічні[77], для цього було збудовано 6 шкільних приміщень і пристосовано під них 21. При школах було організовано 90 інтернатів, якими було охоплено 3304 учні.

За урядовим розпорядженням з середини 60-х років ХХ ст. розпочали укрупнення шкіл, що призвело до їх скорочення (див. табл. 3.1). При цьому було допущено певні помилки, в результаті чого в багатьох селах області закривали

---

[76] ДАЧО. – Ф. Р-763 : Відділ народної освіти виконавчого комітету Чернівецької обласної ради депутатів трудящих. – Оп. 10. – Т. 1. – Спр. 13 : Довідки та інформації по кадрах за 1944-1949 рр. – 61 арк.

[77] ДАЧО. Ф. Р-763 : Відділ народної освіти виконавчого комітету Чернівецької обласної ради депутатів трудящих. Оп. 4. Т. 2. Спр. 531 : Звіти, інформація про роботу вечірніх шкіл робітничої молоді області за 1949/1950 навчальний рік. 209 арк.

початкові школи, у 1990 р. 89 населених пунктів залишилися без освітніх закладів.

Таблиця 3.1.

Статистичні дані про навчальні заклади Чернівецької області у повоєнний період

Тип школи	Навчальний рік							
	1944/1945	1954/1955	1957/1958	1959/1960	1969/1970	1978/1979	1989/1990	1990/1991
Початкові	352	196	155	132	105	62	56	59
Семирічні (*з 1959 – восьмирічні*)	142	269	247	251	238	199	157	142
Середні	23	83	113	110	138	186	222	238
Інші		7	5	10	12	12	14	14
Робітничої молоді		22	29	30	-	-	-	-
Сільської молоді		102	118	65	-	-	-	-
Для дорослих		1	1	1	-	-	-	-
Всього	**517**	**680**	**668**	**599**	**493**	**459**	**449**	**453**
Всього вчителів (тис.)	**1,814**	**5,758**	**6,4**	**6,9**	**6,229**	**10,156**	**11,611**	**11,576**
Всього учнів (тис.)	**88,366**	**103,628**	**107,8**	**107,28**	**136,059**	**150,523**	**141,85**	**143,011**

З середини 60-х років XX ст. зменшувалася кількість учнів у школах, що було пов’язано в основному зі зниженням народжуваності, урбанізацією, а також переходом частини учнів на навчання у професійно-технічні училища. У багатьох сільських школах кількість учнів різко скоротилася, а наповнюваність класів стала мінімальною.

Упродовж 1946-1985 рр. було збудовано шкіл на 125,5 тис. учнівських місць, що зменшило кількість шкіл, де навчалися у дві зміни. Наприклад, у 1959 р. 79,9 % учнів навчалося в першу зміну, а 20,1 % - у другу (21,7 тис. учнів); у 1990 р. 90 % – в першу зміну, а 10 % (12,7 тис. учнів, що охоплювало 80 шкіл) – у другу[78],[79].

---

[78] ДАЧО. Ф. Р-3 : Чернівецький облвиконком, загальний відділ, 1989-1992 рр. Оп. 4. Т. 8. Спр. 2949 : Документи про роботу органів статистики (інформації, довідки, 23 січня – 11 серпня 1989 р.). 100 арк.

[79] ДАЧО. Ф. Р-763 : Відділ народної освіти виконавчого комітету Чернівецької обласної ради депутатів трудящих. Оп. 8. Спр. 676 : Зведені статистичні звіти про початкові, восьмирічні і середні школи за 1969/1970 навчальний рік. 92 арк.

Розширення шкільної мережі потребувало значної кількості вчителів, а тому їх підготовка була одним з головних завдань у галузі народної освіти. У післявоєнні роки тимчасово було налагоджено підготовку педагогічних кадрів через систему короткострокових педагогічних курсів для вчителів I-IV класів та молдавських шкіл у навчальних закладах області як денної, так і заочної форм навчання. У таблиці 3.2 наведено кількість підготовлених на короткострокових курсах учителів у перші післявоєнні роки.

Таблиця 3.2.

Статистичні дані про педагогічні кадри Чернівецької області, підготовлених у перші повоєнні роки на короткострокових курсах

	Навчальний рік				
	1944/1945	1945/1946	1946/1947	1947/1948	1948/1949
Всього підготовлено вчителів	**600**	**430**	**620**	**380**	**625**

Крім того, за 1946-1950 рр. в школи області було направлено 2097 випускників вищих навчальних закладів східних областей України. За допомогою них влада, окрім освітніх цілей, здійснювала й певні ідеологічні завдання щодо радянізації суспільної свідомості підростаючого покоління, так і дорослого населення. Неперервно зростав якісний склад учителів, їх кількість із вищою освітою.

За період з 1944-1945 н. р. по 1959-1960 н. р. кількість вчителів у школах області збільшилася в 3,4 рази, а вчителів з вищою освітою – 6,2 рази. Водночас учителів з незакінченою середньою освітою зменшилося майже в 7 разів. Більшість учителів були прекрасними фахівцями, 1153 з них було нагороджено орденами та медалями, значками відмінника народної освіти. Статистичні дані щодо кількості вчителів та їх освітнього рівня наведено в таблиці 3.3. З наведених даних прослідковується збільшення чисельності вчителів, а з 80-х років XX ст. – зменшення, що було пов’язано зі зменшенням учнівського контингенту, а також переходом учителів у інші сфери діяльності в зв’язку з економічною кризою в країні. Щороку відбувалася якісна зміна складу вчителів, тобто збільшувалася їх кількість з вищою освітою (див. табл. 3.3).

Органи народної освіти регулярно організовували курси і семінарські заняття для вчителів, до проведення яких залучали викладачів Чернівецького державного університету, співробітників інституту вдосконалення вчителів та кращих учителів області.

Значну увагу приділяли підвищенню кваліфікації вчителів за допомогою системи заочної освіти. В 1944-1945 н. р. заочно навчалося 808 вчителів, у 1955-1956 – 1177 з Чернівецької області. Підготовку вчителів молдавських шкіл було зосереджено на молдавському відділенні Чернівецького державного університету.

На покращення навчання та виховання учнів впливало започаткування позакласної та позашкільної роботи з ними, що з кожним роком ставала змістовнішою і була спрямованою на закріплення й поглиблення знань, набуття навичок та умінь на практиці. Про розмах цієї роботи свідчать такі дані: в 1944/1945 н. р. в школах області працювало 960 гуртків, здебільшого технічних, якими було охоплено 26,7 тис. учнів; 1949/1950 – 3290 гуртків, де займалося 56,9 тис. учнів; 1969/1970 – 3381 гурток, в яких займалося 78,725 тис. учнів.

У викладанні математики в школах області потрібно було подолати значну невідповідність програм «старої» румунської та радянської шкіл і покращити методичний рівень її вивчення. За часів радянської влади у навчальних закладах Чернівецької області користувалися, наприклад, підручниками[80],[81] та ін., а для вивчення питання історії системи народної освіти та математики і методики викладання останньої використовували праці[82],[83].

[80] Бескин Л.Н. Стереометрия. Пособие для учителей средней школы. М.: Учпедгиз, 1960. 240 с.
[81] Кисельов А.П. Алгебра: Підручник для середньої школи. Пер. з 31-го рос. вид. учпедгізу. Ч. 2. Для 8-10 класів. 23-є вид. К.: Рад. школа, 1957. 264 с.
[82] Бевз Г.П. Методика викладання математики. Вид. 2-е, перероб. і доп. К.: Вища школа, 1977. 275 с.
[83] Бевз Г.П. Методика розв’язування алгебраїчних задач. К.: Радянська школа, 1975. 240 с.

Таблиця 3.3

Статистичні дані про педагогічні кадри Чернівецької області у повоєнний період

	Навчальний рік							
	1944/1945	**1949/1950**	**1954/1955**	**1959/1960**	**1969/1970**	**1978/1979**	**1989/1990**	**1990/1991**
Всього працювало вчителів	**1814**	**4148**	**5758**	**6900**	**6229**	**10156**	**11611**	**11576**
З вищою освітою	304	512	907	1885	3627	7571	9389	9411
З незакінченою вищою	464	1074	1816	1992	896	498	372	344
З середньою спеціальною та педагогічною освітою	485	1805	1977	2168	1573	1909	1839	1806
З середньою освітою	-	357	813	774	133	178	11	15
З незакінченою середньою	561	400	245	81	-	-	-	-

Варто зазначити, що значна частина підручників з математики часів царської Росії була перероблена і видана за радянської влади, зокрема, В.М. Брадіс[84] акцентує увагу на математиці як науці і навчальному предметі, крім того, розглядаються задачі на побудову в геометрії[85], усні задачі і вправи та геометричні й інші застосування, наприклад, тригонометрії та ін., що спонукало учнів до необхідності вивчення математики.

Упродовж тривалого часу школи області забезпечували вчительськими кадрами з математики за рахунок випускників-математиків вищих навчальних закладів області й України, проводилася робота в напрямку підвищення методичного рівня «старих» учителів математики. Вивчення і обговорення проблем викладання математики та впровадження в практику загальноосвітніх шкіл передового досвіду кращих учителів математики сприяли подальшому підвищенню якості викладання математики.

Покращенню рівня математичної освіти учнів сприяли добротно розроблені навчальні плани і програми з математики, які були однаковими для

[84] Брадіс В.М. Методика викладання математики в середній школі / Під ред. О.І. Маркушевича. К: Державне учбово-педагогічне видавництво „Радянська школа”, 1954. 484 с.

[85] Гостєва С.О. Методика викладання математики: [посіб. для вчителів і студ. пед. ін-тів] / С.О. Гостєва, Б.І. Крельштейн, С.Є. Ляпін, М.М. Шидловська / За заг. ред. С.Є. Ляпіна. К.: Державне учбово-педагогічне видавництво „Радянська школа”, 1956. 468 с.

усіх загальноосвітніх навчальних закладів СРСР[86], позакласна робота з математики, вимірювальні роботи на місцевості, збільшення кількості математичних гуртків та централізований підхід щодо їх роботи. Це сприяло успішному навчанню майбутніх студентів ВНЗ на спеціальностях, де вивчали математичні дисципліни.

Учительські колективи приділяли значну увагу організації гурткової роботи[87], оскільки вона була одним із засобів розвитку творчих здібностей учнів тощо. На заняттях у гуртках розв'язували цікаві задачі, поглиблено вивчали теоретичний матеріал, готували до олімпіад юних математиків різного рівня тощо. Це давало відповідні результати, наприклад, учні Чернівецької середньої школи № 23, Р.І. Григорчук та Я.С. Крилюк у 1967/1968, 1968/1969 і 1969/1970 н. р. були призерами Республіканської та Всесоюзної олімпіад юних математиків. Крім того для відбору здібної до математики молоді функціонувала всесоюзна заочна математична школа. Учням розсилали завдання з математики та проводили з ними заняття і олімпіади усіх рівнів, а переможців всесоюзної олімпіади серед учнів заочної математичної школи рекомендували до зарахування на навчання в МДУ імені Ломоносова на математичні спеціальності без вступних іспитів.

Формування кадрів радянської інтелігенції через систему вищих навчальних закладів було одним із важливих питань боротьби за соціалістичні перетворення у західних областях України. Завдання відбудови народного господарства, подальшого розвитку промисловості, сільського господарства, визначили напрямок розвитку і мету вищої школи – основного джерела забезпечення народного господарства висококваліфікованими радянськими спеціалістами.

[86] Збірник наказів та інструкцій Міністерства освіти УРСР / Відповідальний редактор В.Ю. Тараненко. № 10. К.: Радянська школа, 1985. 32 с.

[87] ДАЧО. Ф. Р-763: Відділ народної освіти виконавчого комітету Чернівецької обласної ради депутатів трудящих. Оп. 8. Спр. 676: Зведені статистичні звіти про початкові, восьмирічні і середні школи за 1969/1970 навчальний рік. 92 арк.

Значні завдання у справі підготовки кадрів через вищу школу було накреслено IV п’ятирічним планом відбудови і розвитку народного господарства УРСР на 1946-1950 рр., зокрема, для промисловості мало бути підготовлено до 25 тис. інженерів різних спеціальностей, близько трьох тисяч економістів, понад 25 тисяч педагогів тощо. В здійсненні цього допомагали й вищі навчальні заклади Чернівецької області.

Кількість фахівців із вищою освітою зросла з 9,5 тис. у 1960 р. до 54,5 тис. осіб у 1989 р., а середньою – збільшилася майже в 7 разів і становила 101,7 тис. осіб[88].

У квітні 1944 р. поновив роботу Чернівецький учительський інститут, а 15 липня 1944 р. – Чернівецький державний університет. За клопотанням виконавчого комітету Чернівецької обласної Ради депутатів трудящих і бюро Чернівецького обкому партії Раднарком УРСР і ЦК КП(б)У 24 жовтня 1944 р. прийняли рішення про відкриття в Чернівцях медінституту.

На 1 січня 1946 р. в трьох вищих навчальних закладах м. Чернівці навчалося 1822 студенти, з них лише 148 були з місцевого населення, а в 17 технікумах навчався 2061 студент[89]. Щороку збільшувалася кількість студентів у вищих навчальних закладах Чернівецької області, зокрема і вихідців з місцевого населення, що було запорукою підготовки національно свідомої місцевої інтелігенції (див. табл. 3.5).

---

[88] ДАЧО. – Ф. Р-763: Відділ народної освіти виконавчого комітету Чернівецької обласної ради депутатів трудящих. Оп. 8. Спр. 676: Зведені статистичні звіти про початкові, восьмирічні і середні школи за 1969/1970 навчальний рік. – 92 арк.

[89] Ростикус Р.П. Розвиток і зміцнення вищої школи в західних областях України в післявоєнний період. Чернівці: Вид-во ЧДУ, 1957. 218 с.

Таблиця 3.4

НАВЧАЛЬНИЙ ПЛАН

середньої загальноосвітньої школи Української РСР з українською мовою навчання на 1985/1986 навчальний рік

№ п/п	*Навчальні предмети*	*Кількість годин на тиждень по класах*										
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Всього
1	Українська мова	13/11	8	8	4	4/3	3/2	2	2	-	-	**42**
2	Українська література	-	-	-	2	2	2	2	2	3	3	**16**
3	Російська мова	1/3	5	6	3	3/4	2/3	2	2	-	-	**26**
4	Російська література	-	-	-	2	2	2	2	2*	3	3	**16**
5	**Математика**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**6**	**4/5**	**4/5**	**57**
6	**Основи інформатики і обчислювальної техніки**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**-**	**1**	**-**	**1**
7	Історія	-	-	-	2	2	2	2/3	3	4	3	**18,5**
8	Основи Радянської держави і права	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	**1**
9	Суспільствознавство	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	**2**
10	Етика і психологія сімейного життя	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	**1**
11	Природознавство	-	1	2	1	-	-	-	-	-	-	**4**
12	Географія	-	-	-	-	2	3	2	2*	2/1	-	**10,5**
13	Біологія	-	-	-	-	2	2	2	2	1	2	**11**
14	Фізика	-	-	-	-	-	2	2	3	4	4/5	**15,5**
15	Астрономія	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	**1**
16	Креслення	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	**2**
17	Хімія	-	-	-	-	-	-	2	2	3	3	**10**
18	Іноземна мова	-	-	-	4	3	2	2	1	1	1	**14**
19	Образотворче мистецтво	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	**6**
20	Музика	1	1	1	1	1	1	1/0	-	-	-	**6,5**
21	Фізична культура	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	**20**
22	Трудове і професійне навчання	1	1	1	2	2	2	2	2	4	4	**21**
23	Початкова військова підготовка	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	**4**
	Разом	**25**	**25**	**27**	**30**	**32**	**32**	**32**	**33**	**35**	**35**	**306**
	Навчально виробнича практика: кількість годин на рік	-	-	-	-	18	24	24	-	132	-	-
	Факультативні заняття	-	-	-	-	-	-	2	2*	4	4	**12**

Для забезпечення навчального процесу Чернівецькому університету необхідні були кваліфіковані науково-педагогічні кадри. Так, у 1944/1945 н. р. в університеті працювало лише 2 доктори і 24 кандидати наук і 32 викладачі без наукових ступенів, а в 1947/1948 н. р. зі 160 викладачів було вже 6 докторів і 46 кандидатів наук. Професорсько-викладацький склад поповнювався як за рахунок інших науково-навчальних закладів країни, так і підготовкою їх через аспірантуру університету, яку було відкрито в 1946 р. на фізико-математичному, хімічному та філологічному факультетах з трьох спеціальностей, у 1959 р. – 9, 1964 р. – 22. Число аспірантів відповідно складало: у 1946 р. – 4 особи, 1950 р. – 16, 1964 р. – 30. За 1946-1980 рр. працівниками університету захищено 400 дисертацій, що значно покращувало науково-дослідну й навчальну роботу. Якщо в 1953/1954 н. р. науково-педагогічну роботу проводили 10 професорів, докторів наук і 91 доцент, кандидат наук, то в 1974/1975 н. р. – 27 і 255, 1990/1991 н. р. – 60 і 400 відповідно[90].

Таблиця 3.5.

Статистичні дані про кількість студентів у вищих навчальних закладах Чернівецької області у перше повоєнне десятиріччя

Навчальний рік	Кількість студентів у вищих навчальних закладах Чернівецької області (денна форма навчання)					
	університет		медінститут		учительський інститут	
	Всього	З місцевих жителів	Всього	З місцевих жителів	Всього	З місцевих жителів
1948/1949	1450	70	1247	76	372	141
1953/1954	1821	832	1346	468	317	203
1954/1955	1989	958	1461	605	*Переведено до складу Чернівецького університету*	

З вищевикладеного випливає, що радянською владою було закладено ґрунтовну основу для підготовки різнопрофільних фахівців, зокрема і в галузі математики. Це дозволило розширити поле діяльності математичних досліджень, які в краї в основному були сконцентровані на фізико-математичному факультеті (з 1968 р. математичному) Чернівецького державного університету, який відновив діяльність 10 жовтня 1944 р., ректором якого було призначено П.М. Каніболоцького. Деканом фізико-математичного факультету з 1 жовтня 1944 р. було призначено І.О. Конозенка, а М.М. Боголюбова з 1 вересня 1944 р. поновлено завідувачем кафедри математичного аналізу. З 1 листопада 1944 р. тимчасово виконуючим обов'язки завідувача кафедри математичного аналізу призначено О.О. Боброва (Наказ по Чернівецькому державному університету № 60 від 13 вересня 1944 р., § 1; № 73 від 11 жовтня 1944 р., § 1 та № 81 від 2 листопада 1944 р., § 1).

[90] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Імена славних сучасників / Редкол.: С.В. Мельничук (голова), В.М. Ботушанський та ін. К.: Світ успіху, 2005. 287 с.

Перш ніж проаналізувати напрямки досліджень з математики в університеті, зупинимося на історії становлення і розвитку фізико-математичного факультету. У перші повоєнні роки на факультеті було створено кафедру диференціальних рівнянь, якою завідував М. Сімонов – учень академіка І. Петровського. Він досліджував крайові задачі для лінійних еліптичних систем, історію розвитку теорії звичайних диференціальних рівнянь та математичної фізики. Завідувачем кафедри алгебри і геометрії було призначено М. Беляєва – учня О. Смогоржевського, випускника Дніпропетровського університету, учасника війни, наукові інтереси якого стосувалися теорії кривих і поверхонь неевклідової геометрії (простори М. Лобачевського).

У 1944/1945 н. р. на першому курсі університету навчалося 300 студентів, серед них – 17 вихідців з Буковини. Після визволення краю значна частина студентів університету і молоді, яка могла вступати на навчання до університету, виїхала за кордон; проте залишилась бібліотека математичної літератури, яка стала науковою основою відродження математичного відділення фізико-математичного факультету.

У цей час на роботу в університет направлено вчених-математиків з провідних вищих навчальних закладів (ВНЗ) держави – чл.-кор. АН України М. Боголюбова, М. Сімонова, О. Боброва, М. Беляєва, М. Фаге, Ю. Круга. Їхніми зусиллями на математичному відділенні фізико-математичного факультету було закладено високий науковий рівень викладання, основи наукових досліджень, вимогливість як до якості проведення занять, так і до знань студентів.

Інтенсивне зростання університету в післявоєнний період дало можливість організувати навчально-виховний та науковий процеси на математичному відділені фізико-математичного факультету (з 1968 р. математичного) на рівні тодішніх вимог, успішно поєднати вирішення завдань з підготовки і виховання для народного господарства висококваліфікованих фахівців з активним розгортанням проблемних досліджень у низці напрямків математичної науки.

Період з 1944 по 1991 р. для математичного відділення фізико-математичного факультету був надзвичайно насиченим у розумінні якісного зростання колективу викладачів, кількості спеціальностей та студентів. Завдяки наполегливій науковій і науково-методичній роботі викладачів О. Боброва, М. Беляєва, Д. Веденяпіна, С. Ейдельмана, С. Івасишена, М. Кириченка, М. Ленюка, М. Матійчука, М. Нагнибіди, В. Рубаника, М. Сімонова, М. Фаге, К. Фішмана, Є. Царькова, Ю. Ястебова та ін. якісний і україномовний склад викладачів-математиків щороку зростав. Результати наукових досліджень викладачі факультету публікували у провідних математичних журналах СРСР, зокрема «ДАН СРСР», «Сибірському математичному журналі», «ДАН УРСР», «Вістях ВНЗ», «Українському математичному журналі», «Диференціальних рівняннях» тощо та доповідали на міжнародних, всесоюзних математичних конференціях і геометричних школах.

Особливо плідними ці роки були для С. Ейдельмана, С. Івасишена, М. Ленюка, М. Матійчука, М. Нагнибіди, В. Рубаника, М. Сімонова, М. Фаге, Є. Царькова – результати їхніх наукових досліджень знайшли відображення у докторських дисертаціях і стали визнаними у Радянському Союзі та за кордоном – вони зробили вагомий внесок у підготовку висококваліфікованих кадрів факультету.

Керівництво університету, фізико-математичного (з 1968 р. математичного) факультету та його кафедр залучало до роботи на кафедрах провідних фахівців з інших ВНЗ та академічних інститутів для читання курсів з провідних напрямків математики, для наукових консультацій та підготовки науково-педагогічних кадрів, зокрема: академіків В. Королюка, М. Корнійчука, Ю. Митропольського, А. Самойленка; професорів М. Горбачука, Б. Делоне, В. Єфремовича, Г. Лаптєва, А. Лучку, М. Перестюка, А. Шестопала, Н. Остіану та ін. На час створення факультету серед 44 його викладачів був лише один доктор наук – професор В. Рубаник – та 17 доцентів і кандидатів наук (з різних причин виїхали з Чернівців 3 доктори наук і 6 доцентів, кандидатів наук), а тому першочерговим завданням стало питання підготовки науково-педагогічних кадрів вищої кваліфікації.

На початку 60-х років XX ст. у зв'язку з розвитком кібернетики, військово-промислового комплексу, появою комп'ютерної техніки виник попит на нові спеціальності, пов'язані з використанням електронно-обчислювальної техніки, тому в червні 1962 р. на факультеті було створено кафедру прикладної математики і механіки (ПММ), яку очолив професор В. Рубаник (1917 – 1993), і на якій студенти проходили спеціалізацію з числових методів. У 1972 р. засновано кафедру математичних проблем управління і кібернетики (МПУіК) з викладачів кафедри ПММ зі спеціалізацією з математичного і програмного забезпечення автоматизованих систем управління – завідувач професор В. Рубаник.

У 1963 р. на факультеті почала працювати обчислювальна лабораторія, згодом реорганізована в науково-обчислювальну, яка з 1975 р. була підпорядкована науковій частині. Встановлено в університеті в цей час і першу обчислювальну машину «Мінськ-14». У 1971 р. однією з перших у ВНЗ України введена в експлуатацію ЕОМ «ШЕОМ-4», у 1975 р. – «ЕС-1020», у 1977 р. – «ЕС-1045».

У 1971 р. за підтримки Чернівецького обкому КПУ та математичного факультету було створено Чернівецьку опорну лабораторію № 125 Київського інституту автоматики (виконувач обов'язків завідувача І.Ю. Гатенюк), з 1974 р. – Чернівецький філіал Київського інституту автоматики, з 1985 р. – Чернівецький інститут автоматики, який у 1995 р. реорганізовано у Відкрите акціонерне товариство «СТЕК».

Науково-обчислювальна лабораторія та Чернівецький філіал Київського інституту автоматики були базою для проходження практики студентів факультету, їх фахового зростання та працевлаштування випускників.

Упродовж вказаного періоду провідні викладачі математичного відділення фізико-математичного (з 1968 р. математичного) факультету проводили роботу з відбору та виховання майбутніх працівників кафедр, а також профорієнтаційну роботу серед випускників шкіл щодо вступу в університет. Кращих студентів університет направляв для завершення навчання у Московський державний університет, а випускників – в аспірантуру. Студенти факультету брали участь у наукових конференціях університету та інших навчальних закладів. При факультеті діяла і функціонує сьогодні спеціалізована вчена рада із захисту кандидатських дисертацій. З учнями загальноосвітніх шкіл проводили районні, міські та обласні олімпіади юних математиків; залучали їх до навчання у заочній математичній школі при Московському державному університеті. Вагомий внесок у цьому належить М. Бєляєву (1904-1981), М. Нестеренку (1907-1977), М. Похилі (1933) та ін., які неодноразово виступали на вчительських конференціях, проводили заняття з учителями математики на курсах підвищення кваліфікації та були членами й головами журі олімпіад юних математиків обласного і республіканського рівнів. Викладачі факультету плідно співпрацювали з загальноосвітніми навчальними закладами, проводячи заняття зі слухачами Малого університету (автор брав участь в його роботі з часу заснування), Буковинської малої академії наук тощо.

Варто зазначити, що наприкінці некласичного періоду матеріал з математики у підручниках загальноосвітніх навчальних закладів набув дещо абстрактного викладу (відчувалася дань школі Н. Бурбаки), значно зменшилась кількість завдань, що безпосередньо використовуються у щоденній практичній діяльності, проте це не вплинуло на рівень математичної підготовки випускників загальноосвітніх шкіл. За цей період двічі змінювався методичний підхід до викладу матеріалу з математики, один з них пов’язаний з ім’ям А. Колмогорова, інший – О. Погорєлова.

Тематика наукових досліджень на математичному відділенні фізико-математичного факультету (з 1968 року математичного) радянської доби залежала, насамперед, від керівників структурних підрозділів. Перші напрямки наукових досліджень організували академіки М.М. Боголюбов, Б.В, Гнєденко, професор О.С. Смогоржевський та ін.

Перші наукові дослідження на кафедрі алгебри і геометрії стосувалися диференціально-геометричних властивостей об’єктів неевклідових просторів, матрицеподібних операторів у гільбертовому просторі, симетризаторів квадратних матриць, канонічної форми узагальненого симетричного оператора, ріманової геометрії та її узагальнень під керівництвом М.К. Фаге (1915-1995) та Ю.М. Ястребова (1917-1961) – випускників Московського університету.

Зокрема Ю.М. Ястребовим було знайдено пару афінних зв'язностей із абсолютним паралелізмом і властивістю – будь-які три точки простору можна доповнити четвертою так, що матимемо паралелограм, протилежні сторони якого паралельні у протилежних змістах; клас просторів, які відмінні від групових, зі зв'язностями Картана[91],[92] .

На кафедрі алгебри і геометрії було відкрито аспірантуру, яку закінчив Б.С. Вакарчук, наукові дослідження якого стосувалися аналітичних ознак взаєморозміщення кривих у просторі Лобачевського та диференціальної геометрії ліній і поверхонь цього простору.

Певного наукового доробку досягли Т.Н. Балазюк, М.Г. Беляєв, Д.В. Веденяпін, Р.Ф. Домбровський, В.Т. Мартинюк, М.М. Похила, В.С. Собчук, Є.У. Ясинська та ін.

Допомога з боку провідних учених інших ВНЗ та академій наук, зокрема академіків О.Д. Олександрова, О.В. Погорєлова, члена-кореспондента АН СРСР Б.М. Делоне, професорів В.А. Єфремовича, М.П. Корнійчука, О.І. Кострикіна, Г.Ф. Лаптєва, В.С. Малаховського, Н.М. Остіану сприяли виробленню алгебраїчно-геометричних напрямків математичних досліджень кафедри.

За час керівництва кафедрою математичного аналізу М.К. Фаге – учня академіка А.М. Колмогорова, К.М. Фішмана та М.І. Нагнибіди впродовж 50-80-х років XX ст. було розвинуто кафедральну наукову тематику, відкрито аспірантуру.

Наукові дослідження на кафедрі за керівництва М.К. Фаге базувалися на застосуваннях функціонального аналізу до питань теорії функцій, він розвинув

---

[91] Чернівецький державний університет / Ред. кол. К.О. Червінський (голова), С.С. Костишин, Б.К. Боролюк, В.М. Лесин та ін. Львів : Видавниче об'єднання „Вища школа", Вид-во при Львівському державному університеті, 1976. 192 с.

[92] Ястребов Ю.Н. Обобщённые групповые пространства // ДАН СССР. 1951. Т. 81. С. 1051-1061.

новий напрямок у дослідженні диференціальних операторів – теорію аналітичних відносно них операторів, що дало можливість встановити еквівалентність звичайних диференціальних операторів вищого порядку. Отримані результати досліджень склали зміст його докторської дисертації „Операторно-аналітичні функції однієї змінної” (1957, Москва) і монографії (1959, Львів). В аспірантурі під керівництвом М.К. Фаге навчалося 12 випускників факультету.

Наприкінці 50-х років XX ст. М.К. Фаге виступив ініціатором створення на факультеті спеціальності з обчислювальної математики. Поставлені ним проблеми і методи дослідження знайшли продовження і розв’язання в працях його учнів – Й.Ф. Кушнірчука, В.В. Крехівського, М.Д. Хриптун, І.Ф. Григорчука та ін.

Узагальнення цих досліджень на випадок інтегро-диференціальних операторів та операторів з частинними похідними отримали Ю.М. Валіцький та В.Г. Хриптун.

Під керівництвом К.М. Фішмана співробітники та аспіранти кафедри досліджували геометричні проблеми теорії аналітичних функцій, пов’язаних із застосуванням теорії лінійних нормованих і локально-опуклих просторів, де одержано низку результатів з питань еквівалентності лінійних операторів у різних аналітичних просторах.

За період завідування кафедрою М.І. Нагнибідою наукові дослідження співробітників кафедри концентрувалися на характеристиці класів ізоморфізмів простору аналітичних функцій, які комутують зі степенями операторів звичайного й узагальненого диференціювання та інтегрування, продовжувалися дослідження з питань еквівалентності операторів, базисності і повноти різних систем аналітичних функцій. У 1985 р М.І. Нагнибіда захистив докторську дисертацію «Некоторые классы операторов в пространстве аналитических в круге функций и их применения» (Обчислювальний центр Сибірського відділення АН СРСР), ним опубліковано низку монографій з досліджуваної проблематики та підготовлено 7 кандидатів фізико-математичних наук (детальніше про наукові дослідження кафедри див. [93]).

Напрямки наукових досліджень кафедри диференціальних рівнянь були пов'язані з науковими інтересами її завідувачів – М.І. Симонова, В.П. Рубаника, С.Д. Ейдельмана, С.Д. Івасишена, М.І Матійчука і стосувалися теорії еліптичних систем, коливань для лінійних систем, задачі Коші і загальних крайових задач для параболічних і еліптичних систем у різних функціональних просторах, історії математики.

Наукові дослідження М.І. Симонова стосувалися теорії крайових задач еліптичних лінійних систем, оцінок розв'язків квазілінійних систем, а також історії розвитку теорії звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики в XVIII ст., які знайшли відображення у докторській дисертації (1956) та монографії «Прикладные методы анализа у Эйлера» (1957, Москва). Учні М.І. Симонова – Є.А. Кушнір та Л.Г. Королюк досліджували розвиток теорії різницевих та диференціально-різницевих рівнянь (звичайних та з частинними похідними) у XVIII-XIX ст., а також тодішньої теорії вказаних рівнянь.

В.П. Рубаником розроблено декілька наближених методів дослідження коливань у квазілінійних системах із запізненням, за допомогою яких здійснено вивчення процесів проходження коливної системи із запізненням через основний, дробовий та комбінаційний резонанси.

Основним об'єктом наукових досліджень С.Д. Ейдельмана та його учнів була коректна розв'язність і якісні властивості розв'язків задачі Коші та крайових задач для параболічних за І.Г. Петровським систем. Зокрема ним побудовано фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для таких систем довільного порядку, коефіцієнти яких залежать від усіх змінних, досліджено їх найважливіші властивості та одержано точні оцінки їх похідних; визначено

---

[93] ДАЧО. – Ф. Р-82: Чернівецький державний університет, м. Чернівці, факультети і кафедри 1944/1945-1969/1970 н.р. – Оп. 9. – Спр. 972: План і звіт про роботу кафедр за 1969/1970 н.р. – 69 арк

новий клас параболічних систем ($2\vec{b}$- параболічні системи), в яких кожна просторова змінна може мати свою вагу відносно часової змінної, побудовано фундаментальні матриці розв’язків задачі Коші для таких систем; доведено теореми про коректну розв’язність задачі Коші для лінійних, квазілінійних і нелінійних параболічних систем; досліджено стабілізацію розв’язків задачі Коші; одержано точні оцінки ядер Пуасона модельних параболічних крайових задач; побудовано і вивчено (сумісно з С.Д. Івасишеним) однорідні матриці Гріна параболічних крайових задач. За результатами досліджень С.Д. Ейдельманом захищено докторську дисертацію «Исследование по теории параболических систем» (1959, Москва). Значну частину отриманих результатів викладено в монографії «Параболические системы» (1964, Москва). Ним підготовлено 20 кандидатів та 4 доктори фізико-математичних наук.

Наукові дослідження кафедри за часів С.Д. Івасишена стосувалися встановлення локальної розв’язності й з’ясування можливостей продовження розв’язків задачі Коші для квазілінійних та нелінійних $2\vec{b}$ - параболічних систем. Ним побудовано і детально вивчено (разом з С.Д Ейдельманом) повні матриці Гріна загальних параболічних крайових задач та підготовлено 12 кандидатів наук.

Під керівництвом М.І. Матійчука на кафедрі продовжувалися дослідження у напрямках започаткованих його попередниками. Матійчуком запропоновано новий метод побудови фундаментальних розв’язків задачі Коші та загальних крайових задач у різних функціональних просторах, отримано низку результатів, що стосуються загальних параболічних та еліптичних систем за наявності певних умов тощо. Результати наукових досліджень М.І. Матійчука знайшли відображення у докторській дисертації «Дослідження класичних розв’язків лінійних параболічних і деяких еліптичних крайових задач» (1980, Інститут математики АН УРСР). Ним підготовлено трьох кандидатів фізико-математичних наук, один з яких захистив докторську дисертацію (детальніше про наукові дослідження кафедри див. [94]).

У зв'язку з розвитком електронно-обчислювальної техніки у 1962 році було відкрито кафедру прикладної математики і механіки. Напрямки наукових досліджень кафедри були пов'язані з науковими інтересами її завідувачів – В.П. Рубаника і В.І. Фодчука та стосувалися дослідження процесів самозбудження й синхронізації коливань в автоколивних системах із запізненням та з лініями зворотнього зв'язку, параметрично збурених коливань, що обумовлені періодичною зміною запізнення тощо.

З досліджуваної проблематики В.П. Рубаником захищено докторську дисертацію (1964, Москва), опубліковано монографію «Колебания квазилинейных систем с запаздыванием» (1969, Москва) та підготовлено 13 кандидатів фізико-математичних наук.

В.П. Рубаником разом з Є.Ф. Царковим започатковано дослідження систем стохастичних диференціально-різницевих рівнянь.

Наукові інтереси В.І. Фодчука стосувалися питань теорії диференціально-функціональних рівнянь. Ним вперше дано обґрунтування методу усереднення та асимптотичних методів Крилова-Боголюбова-Митропольського для регулярно та сингулярно збурених диференціальних рівнянь запізнюючого та нейтрального типів, досліджено метод інтегральних многовидів для нелінійних диференціально-функціональних рівнянь, вивчено схеми побудови періодичних та обмежених розв'язків рівнянь із запізненням і диференціальних рівнянь з частинними похідними. В.І. Фодчук приділяв значну увагу розвитку науково-дослідної роботи з госпдоговірних і бюджетних тем. Ним розроблено Республіканську наукову програму «Асимптотичні і числово-аналітичні методи дослідження диференціально-функціональних рівнянь», яка виконувалася на факультеті упродовж 1991-1995 рр.

[94] ДАЧО. Ф. Р-82: Чернівецький державний університет, м. Чернівці, факультети і кафедри 1944/1945-1969/1970 н.р. Оп. 9. Спр. 972: План і звіт про роботу кафедр за 1969/1970 н.р. 69 арк

На базі кафедри прикладної математики і механіки у 1972 р. було створено кафедру математичних проблем управління і кібернетики, яку очолив В.П. Рубаник. Основним завданням кафедри була підготовка фахівців у галузі математичних проблем управління і, зокрема, математичного забезпечення автоматизованих систем управління. Співпраця кафедри і обчислювальної лабораторії (завідувач Є.Ф. Царков) сприяло якості навчального процесу, який у своїй спрямованості разом з науковими дослідженнями стосувався математичного і комп'ютерного моделювання динамічних систем.

Колектив кафедри разом із завідувачем М.І. Букатарем встановлювали наукові зв'язки з кафедрами моделювання складних систем та теоретичної кібернетики. Ф.О. Сопронюком в 1984 р. було започатковано дослідження з проблем математичного моделювання роботів та теорії керування.

З приходом на посаду завідувача кафедри М.Ф. Кириченка розпочалася перебудова навчального процесу і напрямків наукових досліджень, відкрито аспірантуру. Під його керівництвом захищено три дисертації співробітниками кафедри.

Наприкінці 80-х років XX ст. на факультеті було відкрито кафедру математичного моделювання, завідувачем якої був С.Д. Івасишен.

Підсумовуючи вище викладене, зазначимо, що в університеті у зазначений період функціонували потужні математичні школи (основу яких складали українці) як фундаментального, так і прикладного напрямків, які готували добротних на той час фахівців для педагогічної роботи, науково-дослідних установ і виробництва краю, республіки й держави.

Сучасне суспільство (посткласичний період) потребує елітарних фахівців, особливо з математики, і випереджаючий підхід до їх підготовки найближчим часом буде найхарактернішим атрибутом нового етапу розвитку освітніх систем світової спільноти націй. На цьому етапі на передній план виступатимуть нові вимоги – інноваційна освіта, інтегрована з інтенсивною науково-дослідною діяльністю, тісний зв'язок наукових досліджень у ВНЗ з навчанням і потребами промисловості й економіки, міждисциплінарність освіти і наукових досліджень, гуманізація освіти. Лише ті нації, які зуміють своєчасно створити у себе таку систему освіти та науки, зокрема вищу технічну, зможуть забезпечити своїм країнам умови динамічного розвитку в соціально-економічному і технологічному плані.

ВИСНОВКИ

1. Встановлена структура та вивчені властивості фундаментального розв'язку, встановлена коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за символами, які допускають аналітичне продовження у певну область комплексної площини у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментального розв'язку з граничною функцією, доведено, що розв'язок володіє властивістю локалізаії (властивість локального покращення збіжності);
2. Досліджена нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором та функціями від такого оператора. Розв'язок багатоточкової задачі дається у вигляді згортки фундаментального розв'язку з функцією, за допомогою якої задається відповідна багатоточкова умова і яка ототожнюється з її рядом Фур'є-Ерміта, досліджені властивості фундаментального розв'язку, встановлено коректну розв'язність задачі у випадку, коли початкова функція є елементом простору $\left(S_{1/2}^{1/2}\right)$;
3. Встановлена коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку зі сталими символами та початковими умовами в просторах узагальнених функцій типу W'. Досліджена структура та властивості фундаментального розв'язку зазначеної задачі для еволюційного рівняння із оператором диференціювання нескінченного порядку, побудованим за змінним символом; встановлена розв'язність такої задачі в класі неперервних обмежених на $\mathbb{R}$ функцій;
4. Описано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників гіпероктаедральної групи та алгоритм побудови двохелементних систем твірних вінцевого добутку двох знакозмінних груп; розглянуто асоціативні алгебри, котрі близькі до сум своїх нільпотентних

підалгебр; описано групові властивості та теоретико-групову будову груп трикутних та унітрикутних автоморфізмів кілець многочленів від двох змінних над полями; досліджено групи трикутних автоморфізмів для полів нульової характеристики, а групи унітрикутних автоморфізмів – для полів як нульової характеристики, так і характеристики $p > 0$, зокрема, скінченних полів;

5. Вивчено проблеми розвитку математичної освіти і науки на Буковині і Хотинщині за радянської доби (1940-1941, 1944-1991 рр.). Опрацьовано велику кількість архівних матеріалів, що дало змогу оцінити рівень математичної освіти і науки на Буковині в 1940-1990 рр.
   - Зміни, що відбулися в економічному і політичному житті краю, при його входженні до складу УРСР, знайшли своє відображення і в освітній галузі. В результаті проведеного обліку письменних і малописьменних в області було виявлено 104,9 тис. неписьменних і 53,6 тис. малописьменних. Для ліквідації неписьменності і малописьменності було створено спеціальні комісії в усіх районах області та організовано 380 шкіл і гуртків, спрямовано понад 600 учителів та письменних активістів. Крім шкіл і гуртків ліквідації неписьменності і малописьменності, було створено середні і неповні середні школи для дорослих, вечірні школи робітничої і сільської молоді.
   - Для підготовки кваліфікованих фахівців було поновлено роботу Чернівецького університету, створено Учительський інститут, Інститут удосконалення кваліфікації вчителів, 5 технікумів, 4 спеціалізованих училища, зокрема педагогічні – у Чернівцях та Хотині, які готували вчителів для початкових класів, і 4 сільськогосподарських школи.
   - У викладанні математики в школах області потрібно було подолати значну невідповідність програм «старої» румунської та радянської шкіл і покращити методичний рівень її вивчення.
   - На розвиток напрямків математичних досліджень у краї впливали й традиції, започатковані радянськими математичними школами. Діяльність науковців досліджуваного періоду була неперервно пов’язана

з панівними традиціями радянської науки, а на вибір наукових проблем, в першу чергу, впливало практичне застосування, прагнення молоді краю до знань, істини та бажання максимально проявити власну особистість в обраній галузі. Результати математичних наукових досліджень давали необхідний рівень знань з класичної математики корінним жителям краю, «відкрили дорогу» в світ, необхідний для майбутніх наукових пошуків та їх застосувань.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

До розділу 1

1.1. Городецький В. В., Мартинюк О. В. Параболічні псевдодиференціальні рівняння з аналітичними символами у просторах типу S: Монографія. – Чернівці: Технодрук, 2019. – 280с.

1.2. Дрінь Я.М., Городецький В. В. Задача Коші та нелокальна багатоточкова за часом задача для диференціально-операторних рівнянь у зліченно-нормованих просторах: Монографія. – Чернівці: Чернівец. нац. ун-т, 2019. – 252с.

1.3. Городецький В. В., Мартинюк О. В. Еволюційні псевдодиференціальні рівняння в зліченно нормованих просторах: Монографія. – Чернівці: Технодрук, 2016. – 340с.

1.4. V. V. Gorodetsky, A. A. Shyrokovskykh. Nonlocal in time problem for evolution pseudodifferential equations with analytic symbols. Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences. 2020 July. VIII(28), Issue 233. P. 26-33. DOI: https://doi.org/10.31174/SEND-NT2020-233VIII28-06

1.5. Verezhak H., Gorodetskyi V. A Nonlocal in Time Problem for Evolutionary Singular Equations in Generalized Spaces of Type S. Journal of Function Spaces. 2020. Vol. 2020. 15 p. https://doi.org/10.1155/2020/6873414

1.6. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Властивість локалізації для згорток узагальнених періодичних функцій // Доповіді НАН України, 2020, №4.- С. 3-9 https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.04.003

1.7. V. V. Gorodetskiy, R. S. Kolisnyk, N. M. Shevchuk. On One Evolution Equation of Parabolic Type with Fractional Differentiation Operator in S Spaces. International Journal of Differential Equations. 2020. Vol. 2020. 11 p. https://doi.org/10.1155/2020/1673741

1.8. Gorodetskyi, V.V., Martynyuk, O.V., Feduh, O.V. The well-posedness of a nonlocal multipoint problem for a differential operator equation of second order Georgian Mathematical Journal, 2020, 27(1), p. 67-79. https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0007

1.9. Мартинюк О., Городецький В. Нелокальна за часом задача для одного класу псевдодиференціальних рівнянь з гладкими символами. Матеріали міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування”, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д.

Ейдельмана. – Чернівці, С. 155-156.

1.10. В. Городецький, Р. Колісник, Н. Шевчук Про одну нелокальну задачу для еволюційного рівняння з оператором диференціювання дробового порядку. Матеріали міжнародної наукової конференції “Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування”, присвяченої 100-річчю від дня народження професора С.Д. Ейдельмана. – Чернівці, С. 110-111.

1.11. Городецький В. В., Мартинюк О. В. Про наближені розв’язки однієї абстрактної задачі Коші // Нелінійні коливання. – 2019. – Т.22, № 3. – С. 341-349.

1.12. Городецький В.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В. Про одну нелокальну задачу для рівнянь параболічного типу // Буковинський математичний журнал. – 2019. – Т.7, № 1. – С. 14-31

1.13. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Принцип локалізації для формальних рядів Фур’є, підсумованих методами типу Гаусса-Вейєрштрасса // Буковинський математичний журнал. – 2019. – Т.7, № 2. - С. 30-38.

1.14. Городецький, В.В., Мартинюк, О.В. Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних сингулярних рівнянь // Доповіді НАН України, 2018, №5.- С. 8-15

1.15. В.В. Городецький, Г.П. Вережак. Нелокальна за часом задача для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку // Доповіді НАН України. – 2018. - №8. С. 3-11

1.16. Городецький В.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В. Про наближені розв’язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу // Буковинський математичний журнал – 2018. - Том 6, № 3-4. – С. 6-11.

1.17. Horodets’kyi V.V., Martynyuk A.O., Shyrokovs’kykh A.O. On One Generalization of the Cauchy Problem for Singular Evolutionary Equations of the Parabolic Type. J Math Sci. 2018. Volume 228. P. 181–206.

1.18. Городецький В. В., Вережак Г. П. Стабілізація розв’язків нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного еволюційних псевлдодиференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 2017. – Т.20, № 3. – С. 303-327.

1.19. V. V. Gorodetskii, A. A. Shirokovskikh. Nonlocal time-multipoint problem for a class of evolution pseudodifferential equations. Differential Equations, 2017, Volume 53, Issue 5, pp. 630–645.

1.20. Городецкий В., Мартынюк О., Федух О. Нелокальная многоточечная по времени задача для одного класса эволюционных псевдодифференциальных уравнений с переменными символами. I // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 58-76.

1.21. Городецкий В., Мартынюк О., Федух О. Нелокальная многоточечная по времени задача для одного класса эволюционных псевдодифференциальных уравнений с переменными символами. II // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2. – С. 203-214.

1.22. Городецький В. В., Вережак Г. П. Узагальнені простори типу S // Буковинський математичний журнал – Т. 5, № 1-2. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2017. – С. 49-61

1.23. Городецький В., Мартинюк О., Тодоріко Т. Про одне узагальнення задачі Коші для еволюційних сингулярних рівнянь параболічного типу нескінченного порядку // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Богдана Йосиповича Пташника. Львів, 2017. – С. 22-37.

1.24. V. V. Gorodetsky, O. V. Martynyuk, A. O. Shyrokovskykh. On a generalization of a Cauchy problem for singular parabolic type evolution equations. - Nonlinear Oscillations. – 2016. - Vol. 19, No. 4, pp. 435-457.

1.25. V. V. Horodets'kyi, O. V. Martynyuk, R. I. Petryshyn. Cauchy Problem for Evolutionary Pseudodifferential Equations with Variable Symbols / Journal of Mathematical Sciences. - January 2016, Volume 212, Issue 3, pp 234–253.

1.26. V.V. Horodets'kyi, R. I. Petryshyn, T. S. Todoriko. Nonlocal Problem Multipoint in Time for a Class of Partial Differential Equations of Infinite Order. - Journal of Mathematical Sciences. - September 2016, Volume 217, Issue 4, pp 399–417.

1.27. Городецький В. В., Колісник Р.С. Про одну задачу для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором // Буковинський математичний журнал. – Т.4, №1-2. – Чернівці, 2016. – С. 31-36.

1.28. Городецький В.В., Колісник Р.С., Мартинюк О.В. Про наближені розв'язки задачі Коші для диференціально-операторного рівняння гіперболічного типу. – Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях: Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2018. – С.55.

1.29. V.V. Gorodetskyy, O.V. Martynyuk. Operatorsn of generalized differentiation of infinite order in spaces of type S // International Conference in functional analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, September 18-23, 2017: Book of Abstracts. Lviv, Ukraine, 2017. – P. 45-47.

1.30. Городецький В., Широковських А. Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь зі змінними символами. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування: матеріали XVIII міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, м. Київ, 9-10 жовт. 2017 р. Київ: НТУУ "КПІ". 2017. С. 48-52.

1.31. Городецький В., Мартинюк О. Нелокальна двоточкова задача для еволюційних рівнянь з оператором узагальненого диференціювання // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження Д. І. Мартинюка (19-21 травня 2017 року): матеріали конференції. - Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2017. – С. 28-30.

1.32. Городецький В.В., Мартинюк О.В., Колісник Р.С. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь // XVII Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19-20 травня 2016 р., Київ: Матеріали конф. Т. 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. – Київ: НТУУ "КПІ", 2016. – С. 85.

1.33. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Коректна розв’язність нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних рівнянь з псевдобесселевими операторами // Диференціальні рівняння та їх застосування: тези доповідей Міжнародної наукової конференції, присвяченої 70-річчю академіка НАН України М.О. Перестюка, Ужгород, 19-21 травня 2016 р. – Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла», 2016. – С. 59.

До розділу 2

2.1. Sikora V.S. Metasymmetrical groups of infinite rank and their order // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей VII міжнародної наукової конференції.– Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016.– С. 209-210.

2.2. Сущанський В.І., Сікора В.С. Операції на групах підстановок. Теорія та застосування.– Чернівці: Технодрук, 2017.– 240 с.

2.3. Сікора В.С. Мінімальні системи твірних для гіпероктаедральної групи та її нормальних підгруп // Научный взгляд в будущее.– Выпуск 5, Том 2.– Одесса: Куприенко СВ, 2017.– С.104-107.

2.4. Сікора В.С. Мінімальні системи твірних скінченних гіпероктаедральних, мономіальних, метасиметричних та автоматних груп підстановок: Монографія.– Чернівці: Технодрук, 2018.– 168 с.

2.5. Сікора В. Про мінімальні системи твірних у вінцевих добутках скінченної кількості знакозмінних груп // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р.–Чернівці: ЧНУ, 2018.– С.122.

2.6. Сікора В.С. Двохелементні системи твірних вінцевого добутку деяких груп // Modern scientific researches.– Issue 11, Part 2. – P.110-118.

2.7. Лучко В.С., Петравчук А.П., Шевчик О.М. Про асоціативні алгебри з двома великими нільпотентними підалгебрами // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фіз.-мат. науки. – 2016. –№3. – С. 19-24.

До розділу 3

3.1. Житарюк І.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Методичні особливості розв’язування задач з стереометрії у старшій школі // Pedagogy and Psychology. – IV(49) Issue:103. – 2016 – P. 61-64

3.2. Житарюк І.В., Близнюк В.І. Система освіти Радянської Буковини у перші повоєнні роки (середина 50-х років XX ст.) / Материали за XII Международна научна практична конференция Achievement of high school-2016, 17-25 November, 2016. – Т. 3. Икономики. Публичната администрация. Политология. История. – София : БялГРАД-БГ ООД, 2016. – С. 105-107.

3.3. Житарюк І.В., Довгей Ж.І., Лучко В.С. Передумови розвитку системи освіти Буковини і Хотинщини за радянської доби // Pedagogy and Psychology. – V(50) Issue:111. – 2017 – P. 63-66 http://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/ped_psy_iv50_111.pdf

3.4. Житарюк І.В., Довгей Ж.І., Лучко В.С. Система освіти Буковини і Хотинщини радянської доби (40-41 роки XX ст.) // Pedagogy and Psychology. – V(53) Issue:114. – 2017 – P. 61-64 http://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/ped_psy_v_53__114.pdf

3.5. Житарюк І.В., Мироник В.І., Мироник О.Д. Система освіти Радянської Буковини у перші повоєнні роки (44-50-і роки XX ст.) // Pedagogy and Psychology. – V(62) Issue:142. – 2017 – P. 55-58 http://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/ped_psy62142.pdf

3.6. Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В. С. Міжпредметні зв'язки при розв'язуванні задач алгебри з використанням геометрії // Pedagogy and Psychology : – VI(66), Issue 162 - 2018. – P. 66-69 https://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/httpdoi.org10.31174send-pp2018-162vi66-14.pdf

3.7. Житарюк І.В., Черевко І.М. Факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету – 50. *Буковинський математичний журнал*. Т. 6, № 3-4, 2018. С. 63-76. http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/894/837

3.8. Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В.С. Методичні особливості розв'язування задач з математики підвищеної складності з використанням властивостей і графіків елементарних функцій. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*. VI (66), Issue: 179, 2018. С.68-71.

3.9. Житарюк І.В., Лучко В.М., Лучко В. С. Методичні особливості розв'язування ірраціональних рівнянь з параметрами з використанням властивостей і графіків елементарних функцій. *Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology*. VII (80), Issue: 198, 2019. С. 52-54.

https://seanewdim.com/uploads/3/4/5/1/34511564/httpsdoi.org10.31174send-pp2019-198vii80-13.pdf